

# **Bases da Morfologia Matemática para Análise de Imagens Binárias**

**Gerald Jean Francis Banon  
Junior Barrera**

Departamento de Processamento  
de Imagens - INPE

Departamento de Ciência da Computação  
Universidade de São Paulo

IX Escola de Computação  
Recife, 1994

CIP - Catalogação Impressa na Publicação  
Elaborada pela Biblioteca de Informática da UFPE

B219b Banon, Gerald Jean Francis  
Bases da morfologia matemática para análise  
de imagens binárias / Gerald Francis Banon,  
Junior Barrera. - Recife: UFPE-DI, 1994.  
xiii, 230p. : il.

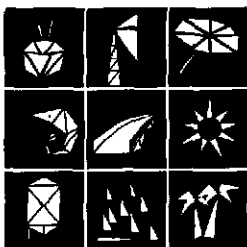
Trabalho apresentado na Escola de  
Computação (9. : 1994, julho : Recife-PE) ;  
Editado por Silvio Lemos Meira.

1. Morfologia matemática 2. Análise de  
imagens 3. Caixa de ferramentas morfológicas  
I. Barrera, Junior II. Título

Esta obra foi impressa a partir de originais entregues já compostos  
pelos autores.

Editado por: Silvio Lemos Meira

Projeto Gráfico: LAB PV  
Hans Waechter, Maria Dulce Duarte e Paula Valadares



## Apresentação

A Escola de Computação é um dos mais tradicionais, sérios e densos eventos científicos da área de Informática no Brasil. Iniciada em 1979, a Escola é um foco de atualização e articulação de pesquisadores e estudantes de Ciência da Computação; através de um número de cursos básicos e avançados sobre o estado da arte em diversas linhas de pesquisa, provê um ambiente único para troca de experiências e atualização científica e profissional.

Nesta IX Escola, como nas anteriores, estão sendo gerados e impressos um número de livros-texto em português, ampliando assim a literatura nacional na área; muitos dos livros de Escolas anteriores - e certamente desta - se tornaram textos largamente usados em cursos nacionais de graduação e pós-graduação.

Além dos 8 cursos nacionais, outros 12 cursos internacionais são parte da IX Escola; todos estão sendo ministrados pelos mais renomados profissionais da área no país e no exterior.

A IX Escola também compreende a ExpoComp, uma exposição de protótipos acadêmicos, a Escolinha de Computação, uma série de cursos de informação e motivação para estudantes do segundo grau maior e o WoLLIC, o Workshop on Logic, Language, Information and Computation.

Este livro é parte de uma coleção de oito volumes especialmente preparados para a IX Escola de Computação, promovida pelo Departamento de Informática da Universidade Federal de Pernambuco e realizada em Recife-PE, de 24 a 31 de julho de 1994.

O Editor



## **OS AUTORES**

**Gerald Jean Francis Banon** é pesquisador Sênior da Divisão de Processamento de Imagens (DPI) do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), em São José dos Campos, SP. Ele é engenheiro eletrônico, especialista em controle automático, pelo “Institut Nationale des Sciences Appliquées” (INSA) em Toulouse, França, “Docteur Ingénieur” e “Docteur d’état” em Controle Automático e Sistemas pela Universidade Paul Sabatier em Toulouse, França. Suas áreas de interesse são Processamento Digital de Imagens e Morfologia Matemática.

banon@dpi.inpe.br

**Junior Barrera** é pesquisador assistente do Departamento de Ciência da Computação (DCC) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo, em São Paulo, SP. Ele é engenheiro electricista, especialista em controle automático, pela Faculdade de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica da USP (FEE – EPUSP), mestre em Computação Aplicada pelo INPE e Doutor em Controle Automático e Sistemas pela FEE–EPUSP. Suas áreas de interesse são Processamento Digital de Imagens e Morfologia Matemática.

jb@ime.usp.br



**Este livro é dedicado a**

**Martha**

**Lise**

**Gabriela**

**Michelle**

**René, com eterna saudade**

**e a**

**Sylvia**

**Juliana**

**Rodrigo**

**Helena**

**João**





## Prefácio

A Morfologia Matemática foi criada em meados da década de sessenta, pelo grupo liderado por Georges Matheron e Jean Serra, da École Supérieure des Mines de Paris, em Fontainebleau. Até o final dos anos setenta, seu grande potencial para a Análise de Imagens tinha sido reconhecido e bastante utilizado na Europa, principalmente nas áreas envolvendo Microscopia. A partir dos anos oitenta, a Morfologia Matemática começou também a ser difundida nos Estados Unidos e hoje é um fértil campo de pesquisas, tanto teóricas como práticas, sendo vigorosamente explorado em todo o mundo.

No INPE, a Morfologia Matemática começou a ser estudada por volta de 1984, com a chegada de um engenheiro que participava de um programa de cooperação técnica com a França, Christian Guichou. Em 1986, foi desenvolvido na Divisão de Processamento de Imagens do INPE um software de Análise de Imagens baseado na Morfologia Matemática e denominado ANIMA, por vários membros daquela Divisão. Embora esse software fosse relativamente simples, oferecendo apenas algumas operações em imagens binárias, já era possível obter resultados interessantes, como detecção de bordas, contagem de partículas, etc. No ano seguinte, um dos autores deste livro, Junior Barrera, completou com brilho sua dissertação de mestrado na área. Os estudos prosseguiram, com o outro autor do livro, Dr. Gerald J. F. Banon, liderando uma série de seminários sobre os trabalhos de Petros Maragos. Além de alguns resultados aplicados, envolvendo a eliminação de listras em imagens do satélite Spot, ou a avaliação do desempenho de detectores morfológicos de bordas que haviam sido propostos por Robert M. Haralick, importantes resultados teóricos foram obtidos pelos autores deste livro, com a generalização de decomposições para operadores invariantes por translação (i.t.) e isotônicos, para o caso de operadores i.t., mas não necessariamente isotônicos e a extensão desses resultados originalmente formulados para subconjuntos, para o caso geral de transformações quaisquer entre dois reticulados completos.

O autor deste prefácio teve, portanto, a oportunidade de ser testemunha do empenho e da capacidade demonstrados pelos Drs. Banon e Barrera, que agora oferecem à comunidade acadêmica a oportunidade de, pela primeira vez, ter disponível em língua portuguesa um texto dedicado à Morfologia Matemática.

São José dos Campos, maio de 1994.

Nelson D. A. Mascarenhas.



## Agradecimentos

Nós gostaríamos de agradecer a várias pessoas que contribuíram com as nossas pesquisas em Morfologia Matemática, que iniciamos em meados da década de oitenta no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e que acabaram levando à confecção deste livro.

Em primeiro lugar, gostaríamos de agradecer ao Dr. Cristian Guichou, que, durante o seu estágio de cooperação científica no INPE em 1984, nos apresentou às idéias e ferramentas computacionais desenvolvidas pelos pesquisadores do “Centre de Morphologie Mathématique de l’École Supérieure des Mines de Paris” (CMM).

Gostaríamos de agradecer também ao Dr. Jean Serra, diretor do CMM e um dos fundadores da Morfologia Matemática, pela inestimável colaboração nesses anos, nos acolhendo por diversas vezes em Fontainebleau; nos visitando e oferecendo um curso no SIBGRAPI’92, e, sobretudo, nos propiciando contínuo acesso às publicações mais recentes do CMM.

Agradecemos ao Dr. Roberto de Alencar Lotufo e aos alunos Adriano Nagel Schimidt Rodrigues e Luis Fernando dos Santos Vieira, à bolsista Maria Celeste Vilela e ao cooperante francês Guy Pilchen pela colaboração no desenvolvimento do software de Morfologia Matemática, que está sendo distribuído junto com este livro.

Gostaríamos de agradecer ainda a colaboração dos alunos de pós-graduação dos cursos de Morfologia Matemática, que oferecemos desde 1991 no INPE e desde 1992 na USP. Em especial, agradecemos aos alunos Ana Lucia Bezerra Candeias e João Ricardo de Freitas Oliveira pela revisão de parte do texto deste livro, e à Maria Magdalena F. Rodriguez pelas discussões enriquecedoras sobre o assunto: Topologia versus Topologia Digital.

Somos gratos também pelo apoio recebido da direção da Divisão de Processamento de Imagens do INPE, nas pessoas dos engenheiros Ricardo Cartaxo e Gilberto Câmara Neto, e do Departamento de Ciência da Computação da USP (DCC-USP), nas pessoas do Dr. Imre Simon e do Dr. Routo Terada..

Somos especialmente gratos aos organizadores desta IX Escola de Computação e em particular à seu presidente, o Dr. Silvio Lemos Meira, pela oportunidade de divulgar este livro.

Não poderíamos deixar de agradecer também aos colegas do INPE e do DCC-USP que direta ou indiretamente colaboraram com o desenvolvimento deste trabalho. Em especial, nossos sinceros agradecimentos e nossa eterna amizade ao Dr. Nelson D. A. Mascarenhas que tão gentilmente aceitou prefaciar este livro.

Finalmente, gostaríamos de deixar o nosso agradecimento a nossas esposas e filhos pelo apoio e compreensão durante todos esses anos.

Durante o período de elaboração deste livro, os autores receberam o apoio do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), através do processo 91/3532-2.

Estado de São Paulo, maio de 1994.

Gerald J. F. Banon e Junior Barrera.



# Conteúdo

Lista de figuras	ix	
Lista de tabelas	xiii	
<b>1</b>	<b>Introdução</b>	
<b>2</b>	<b>Álgebra e imagens binárias</b>	
2.1	Subconjuntos versus funções binárias	7
2.2	Álgebras de Boole dos subconjuntos e das funções binárias	10
2.3	Extensão das operações de união e interseção	16
2.4	Reticulados dos subconjuntos e das funções binárias	21
<b>3</b>	<b>Operadores sobre subconjuntos</b>	
3.1	Operadores	31
3.2	Dilatações, erosões, anti-dilatações e anti-erosões	34
3.3	Operações sobre operadores	36
<b>4</b>	<b>Operadores invariantes por translação</b>	
4.1	Translações e transposição	51
4.2	Adição e subtração de Minkowski	65
4.3	Dilatações e erosões invariantes por translação	71
4.4	Dilatações e erosões condicionalmente invariantes por translação	79
<b>5</b>	<b>Dualidades entre dilatações e erosões</b>	
5.1	Conexão de Galois	81
5.2	Dualidade por complementação	90
<b>6</b>	<b>Aberturas e fechamentos</b>	
6.1	Aberturas e fechamentos algébricos	99
6.2	Aberturas e fechamentos morfológicos	110
6.3	Aberturas e fechamentos invariantes por translação	114
6.4	Aberturas e fechamentos condicionalmente invariantes por translação	128
<b>7</b>	<b>Topologia Digital</b>	
7.1	Conexidade	131
7.2	Buraco, borda, árvore de adjacência e homotopia	142

<b>8 Máquinas Morfológicas</b>	
8.1 Linguagem morfológica .....	151
8.2 Elementos estruturantes primitivos .....	154
8.3 Descrição de uma Máquina Morfológica .....	156
<b>9 Caixa de ferramentas da Morfologia Matemática</b>	
9.1 Programas de nível 1 .....	173
9.2 Programas de nível 2 .....	180
9.3 Programas de nível 3 .....	201
<b>A Caixa de ferramentas MMach</b>	
A.1 Sistema KHOROS .....	217
A.2 Arquitetura da caixa de ferramentas MMach .....	218
A.3 Conteúdo da caixa de ferramentas MMach .....	219
A.4 Avaliação de desempenho dos algoritmos .....	220
<b>Bibliografia</b>	<b>221</b>
<b>Índice</b>	<b>225</b>

## Lista de figuras

2.1	Gráfico de uma função binária. ....	8
2.2	Função indicadora e suporte. ....	9
2.3	Bijeção entre os subconjuntos e as funções binárias. ....	10
2.4	Imagem binária. ....	10
2.5	Duas funções binárias. ....	12
2.6	União de duas funções binárias. ....	12
2.7	Operação de união entre duas funções binárias. ....	13
2.8	Interseção de duas funções binárias. ....	13
2.9	Operação de interseção entre duas funções binárias. ....	14
2.10	Complemento de uma função binária. ....	14
2.11	Operação de complementação de uma função binária. ....	15
2.12	Diferença entre duas funções. ....	16
2.13	Operação de subtração entre duas funções binárias. ....	16
2.14	Operações de união e interseção de uma função binária. ....	18
2.15	Duas funções binárias comparáveis. ....	22
2.16	Relação de igualdade entre funções binárias. ....	22
2.17	Relação “menor que” entre funções binárias. ....	23
2.18	Algoritmo de teste de comparabilidade entre funções binárias. ....	26
2.19	Algoritmo de teste de igualdade entre funções binárias. ....	27
2.20	Limitante superior de dois subconjuntos. ....	27
2.21	Limitante inferior de dois subconjuntos. ....	28
3.1	Um operador. ....	32
3.2	Bijeção entre as dilatações e as funções estruturantes. ....	36
3.3	Quatro modos de representar uma dilatação. ....	37
3.4	União e interseção de operadores. ....	38
3.5	Especificação das funções estruturantes. ....	45
3.6	União e interseção das funções estruturantes. ....	45
3.7	União de dilatações. ....	46
3.8	Interseção de dilatações. ....	48
3.9	Composição de operadores. ....	49
4.1	Dois tipos de grade. ....	52
4.2	Construção da soma num espaço afim. ....	57
4.3	Soma e oposto num espaço afim. ....	58

4.4	Um subconjunto. . . . .	59
4.5	Translado de um subconjunto por um vetor. . . . .	60
4.6	Um operador de translação. . . . .	61
4.7	Transposto de um subconjunto. . . . .	62
4.8	Transposição. . . . .	63
4.9	Simetria de um subconjunto (em relação a origem). . . . .	63
4.10	Relação entre o translado e o transposto. . . . .	65
4.11	Soma de Minkowski de dois subconjuntos. . . . .	66
4.12	Três exemplos de soma de Minkowski. . . . .	68
4.13	Diferença de Minkowski entre dois subconjuntos. . . . .	69
4.14	Bijeção entre as dilatações i.t. e os subconjuntos. . . . .	73
4.15	Dilatação de um subconjunto por um elemento estruturante. . . . .	74
4.16	Dois modos de construir o dilatado. . . . .	75
4.17	Erosão de um subconjunto por um elemento estruturante. . . . .	75
4.18	Modo de construir o erodido. . . . .	76
4.19	Diagrama de blocos de uma dilatação pelo losângulo 5 por 5. . . . .	78
4.20	Dilatação invariante por translação. . . . .	80
4.21	Dilatação condicionalmente invariante por translação. . . . .	80
5.1	Conexão de Galois. . . . .	83
5.2	Bijeção entre as erosões e as dilatações. . . . .	86
5.3	Bijeção entre as erosões e as funções estruturantes. . . . .	87
5.4	Quatro modos de representar uma erosão. . . . .	88
5.5	Propriedade de uma conexão de Galois (começando pela erosão). . . . .	91
5.6	Propriedade de uma conexão de Galois (começando pela dilatação). . . . .	94
5.7	Bijeção entre as erosões e as dilatações através da dualidade por complementação. . . . .	95
5.8	Transposição versus dualidade por complementação. . . . .	96
5.9	Dualidade por complementação (usando uma erosão). . . . .	96
5.10	Dualidade por complementação (usando uma dilatação). . . . .	97
6.1	Abertura algébrica de um subconjunto. . . . .	103
6.2	Fechamento algébrico de um subconjunto. . . . .	106
6.3	Bijeção entre as aberturas e as coleções sup-fechadas. . . . .	106
6.4	Determinação dos abertos e fechados relativos à uma conexão de Galois. . . . .	112
6.5	Problema da reconstrução após uma erosão. . . . .	113
6.6	Transposição versus dualidade por complementação. . . . .	114
6.7	Abertura morfológica i.t. de um subconjunto. . . . .	118
6.8	Modo de construir o aberto. . . . .	119
6.9	Abertura morfológica i.t. de um subconjunto que "toca as bordas do domínio". . . . .	121
6.10	Fechamento morfológico de um subconjunto. . . . .	122
6.11	Modo de construir o fechado. . . . .	123
6.12	Efeitos da abertura. . . . .	124
6.13	Efeitos do fechamento. . . . .	125
6.14	Propriedade da união de abertos. . . . .	126
6.15	Isotomia da abertura. . . . .	127
6.16	Abertura algébrica. . . . .	129
6.17	Abertura morfológica c.i.t. de um subconjunto que "toca as bordas do domínio". . . . .	130



7.1	Propriedade dos elementos de subcoleções induzidas.	133
7.2	Um subconjunto 4–desconexo.	136
7.3	Um subconjunto 8–conexo.	136
7.4	Um subconjunto 4–conexo.	137
7.5	Dilatação condicional.	140
7.6	3–dilatação condicional.	141
7.7	Aberturas por reconstrução.	141
7.8	Um subconjunto e seu complemento.	142
7.9	Um buraco num subconjunto.	143
7.10	Operador sup–gerador.	146
7.11	Extração dos pontos isolados.	147
7.12	Borda relativa às componentes 4–conexas.	148
7.13	Borda relativa às componentes 8–conexas.	149
7.14	Árvores de adjacência.	149
8.1	Árvore sintática de uma frase.	153
8.2	Semântica de uma frase avaliada num subconjunto.	154
8.3	Decomposição em termos de subconjuntos do quadrado elementar.	154
8.4	Decomposição de um subconjunto convexo.	155
8.5	Erosão adaptativa.	157
8.6	Arquitetura de uma máquina morfológica.	158
8.7	Processador morfológico.	159
8.8	Processadores de dilatação em “pipelines” paralelos.	159
8.9	Processador primitivo baseado em operações globais.	160
8.10	Processador primitivo baseado em operações de vizinhança.	161
8.11	Alguns elementos estruturantes típicos.	162
8.12	Representação compactada de uma imagem binária.	164
8.13	Representação híbrida de uma imagem binária.	166
8.14	As nove regiões da imagem.	169
8.15	Composição de n erosões em uma linguagem visual.	171
9.1	Alguns padrões empregados em Análise de Imagens.	174
9.2	rotações de um padrão.	175
9.3	Afinamento.	175
9.4	Espessamento.	176
9.5	Afinamento e espessamento não homotópico.	177
9.6	Afinamento e espessamento homotópico.	177
9.7	Alguns padrões para afinamentos e espessamentos 4–homotópicos.	178
9.8	Restauração e extração de bordas.	179
9.9	Erosão por discos, segundo a distância de quarteirão.	181
9.10	Erosões por discos Euclidianos discretos.	182
9.11	Representação de curvas simples.	183
9.12	Erosão por um segmento de reta.	184
9.13	Abertura por discos Euclidianos discretos.	185
9.14	Operador cartola por discos Euclidianos discretos.	187
9.15	Reconhecimento genérico de forma.	188
9.16	Reconhecimento genérico de forma com folga.	189

9.17	Restauração por um filtro fi-gama. . . . .	190
9.18	Restauração por um filtro gama-fi. . . . .	191
9.19	Comparação entre os filtros fi-gama e gama-fi-gama. . . . .	192
9.20	Restauração por um filtro alternado sequencial fi-gama. . . . .	193
9.21	Restauração por um filtro 3-fi-gama. . . . .	193
9.22	Restauração por um filtro da mediana. . . . .	194
9.23	Restauração por um filtro FI-GAMA. . . . .	194
9.24	Identificação de pontos extremos. . . . .	195
9.25	Identificação de pontos triplos. . . . .	196
9.26	Sequência de afinamentos homotópicos. . . . .	197
9.27	Sequência de afinamentos não homotópicos. . . . .	198
9.28	Sequência de espessamentos homotópicos. . . . .	199
9.29	Sequência de espessamentos condicionais. . . . .	200
9.30	Restauração por um filtro do centro. . . . .	201
9.31	Rotulação. . . . .	202
9.32	Eliminação dos objetos que tocam as bordas. . . . .	203
9.33	Filtragem de objetos pequenos. . . . .	204
9.34	Fechamento de buracos. . . . .	205
9.35	Esqueletos por afinamento. . . . .	206
9.36	Esqueleto por afinamento. . . . .	207
9.37	Exoesqueletos por espessamento. . . . .	208
9.38	Composição de esqueletos por afinamento. . . . .	209
9.39	SKIZ. . . . .	210
9.40	Esqueleto por afinamento filtrado. . . . .	211
9.41	Espessamentos condicionais. . . . .	211
9.42	Espessamento condicional suave. . . . .	212
9.43	Erosão última. . . . .	213
9.44	Bissetor condicional. . . . .	214
9.45	Esqueleto morfológico. . . . .	215

## Lista de tabelas

2.1	Definição de união e interseção. ....	11
2.2	Definição de complementação. ....	11
2.3	Definição das relações binárias. ....	21
2.4	Prova da reflexividade. ....	23
2.5	Prova da anti-simetria. ....	23
2.6	Prova da transitividade. ....	24
2.7	Prova da consistência. ....	25
3.1	Extensividade/anti-extensividade do composto. ....	47
3.2	Isotonia/antonia do composto. ....	47
3.3	Classe do composto. ....	47
8.1	Gramática da LM. ....	152
8.2	Semântica da LM. ....	152
8.3	Complexidade das implementações. ....	162
8.4	Algoritmo de união de duas imagens binárias. ....	165
8.5	Algoritmo de Erosão por um segmento horizontal de tamanho 1. ....	165
8.6	Operações definidas para o tipo abstrato FILA. ....	166
8.7	Algoritmo de união de duas imagens binárias. ....	167
8.8	Algoritmo de erosão pelo quadrado elementar. ....	168
8.9	Composição de n erosões em uma linguagem interpretada. ....	170
A.1	Conteúdo da caixa de ferramentas MMach. ....	219
A.2	Desempenho das dilatações e erosões. ....	220



# Capítulo 1

## Introdução

A análise de imagens por computador digital (ou, simplesmente, *análise de imagens*) é uma tecnologia importante na sociedade moderna, pois auxilia o desenvolvimento de atividades humanas nas mais diversas áreas: medicina, odontologia, biologia, geologia, meteorologia, astronomia, engenharia de produção, robótica, física, química, macro-economia, direito, arquitetura, artes, arqueologia, ...

Um paciente com um tumor no cérebro necessita de uma cirurgia. A operação é delicada e o neurocirurgião deve planeja-la cuidadosamente. Dentre as informações mais relevantes para descrever o quadro estão a localização, o tamanho e a forma do tumor. Para adquirir dados dessa natureza o cirurgião dispõe da tomografia, um conjunto de imagens de fatias transversais do cérebro adquiridas por um dispositivo eletrônico. A análise dessas imagens leva às informações desejadas, porém este procedimento normalmente envolve tarefas complexas: visualização de objetos tridimensionais a partir de cortes, observação dos objetos sob pontos de vista diversos, diferenciação de texturas similares, tomada de medidas geométricas precisas, etc. Nesse caso, o papel da análise de imagens é exatamente fornecer ferramentas para simplificar essas tarefas.

Um robô móvel desenvolve tarefas num universo hostil. As suas câmeras acusam a presença de um obstáculo em rota de colisão e o computador de bordo corrige o seu curso. Para o seu deslocamento no ambiente desconhecido, o robô faz uso de algoritmos automáticos de análise de imagens para a identificação de alvos e a inferência de posição.

Os bancos de dados constituem um dos usos mais populares dos recursos da informática. Embora os bancos de dados mais comuns (funcionários de uma empresa, alunos de uma escola, etc.) armazenem apenas informações descritas na forma de cadeia de caracteres, existem aplicações em que é importante armazenar imagens: a polícia federal gostaria de dispor de um banco de fotos e impressões digitais de criminosos, o instituto de marcas e patentes gostaria de dispor de um banco dos logotipos das empresas cadastradas, o museu do Louvre gostaria de dispor de um banco de suas obras de artes, etc. Um dos problemas-chaves em banco de dados convencionais é a consulta e o mesmo vale para bancos de imagens. Dada uma certa amostra de impressão digital, como verificar se ela pertence a um criminoso fichado? Dado um certo logotipo proposto para ser registrado, como verificar se ele é plágio ou não? Dada uma certa obra de arte, como identificar qual o seu estilo? As técnicas de análise de imagens aparecem como o caminho natural para responder a essas perguntas.

Em uma sociedade cada vez mais competitiva, o controle de qualidade de produtos industrializados constitui uma das principais preocupações dos engenheiros de produção: as placas de circuitos impressos

devem ter as suas trilhas perfeitas, as barras de ligas metálicas devem suportar cargas correspondentes às suas especificações, as cintas de aço que robustessem os pneus devem estar distribuídas de forma regular ao longo da superfície de borracha, os grãos de arroz polidos não podem estar quebrados, as peças de cerâmica não podem estar lascadas, etc. Em todos os casos, o controle deve se processar de forma precisa, sistemática, eficiente e sem danificar o produto. A análise de imagens atinge esses objetivos através de algoritmos que identificam padrões geométricos que refletem qualidades dos produtos. Assim, as trilhas dos circuitos devem ser contínuas e disjuntas de trilhas vizinhas, a distribuição de grãos em secções transversais de ligas permite aferir a resistência do material, a distância entre as cintas dos pneus deve ser constante, os grãos de arroz devem ser pontagudos e ter um comprimento mínimo, as peças de cerâmica devem ser lisas.

Antes do advento do uso de computadores para a edição de textos, uma infinidade de documentos foi produzido por máquinas de escrever. A necessidade de arquivar esses documentos em bancos de dados ou reproduzi-los, após a modificação de pequenos trechos, motivou o desenvolvimento de equipamentos que adquirem esses documentos na forma de imagens digitais e os transformam em arquivos de caracteres compatíveis com os editores de texto. A principal tarefa desses sistemas de análise de imagens especializados é reconhecer os caracteres e palavras presentes nas imagens dos textos.

Estudos geológicos e sondagens locais em uma região apontam a existência de petróleo. Antes de tomar a decisão de investir recursos para a extração do óleo, o responsável pela empresa petrolífera necessita de maiores informações sobre a viabilidade econômica da operação. Uma das informações mais relevantes para caracterizar o quadro é a permeabilidade da rocha, isto é, a dificuldade que o óleo teria para escoar através da rede de canais internos à rocha. Para isso, é preciso estudar a geometria da rede de canais. Por exemplo, se existirem muitos canais estreitos a energia necessária para retirar o óleo tende a ser grande. Usualmente, extrai-se uma amostra cilíndrica da rocha e corta-se essa amostra em fatias transversais. Cada fatia corresponderá a uma imagem. A partir desse conjunto de imagens, reconstrói-se a estrutura tridimensional dos canais. Os problemas envolvidos nesse procedimento são similares aos que aparecem na análise de tomografias.

O volume da safra agrícola é um parâmetro macro-econômico muito importante, contudo, em países de dimensão continental, como o Brasil e o Canadá, a sua estimação é uma tarefa complexa. O caminho usualmente adotado para atacar o problema é a análise de imagens de sensoriamento remoto. Cada cultura tem uma resposta característica, quando observada pelos sensores dos satélites: a “assinatura espectral”. Os procedimentos de análise de imagens devem identificar as regiões onde ocorrem culturas com a mesma assinatura espectral. Procedimentos análogos podem ser adotados para identificar e classificar outras formas de ocupação do solo, como, por exemplo, o nível e a origem de desmatamentos em grandes florestas.

E o número de exemplos de aplicações não para por aqui. Poderíamos falar do controle de tráfico urbano, da previsão de tempo, da análise de campos de temperatura, da classificação de cromossomos ou de galáxias, da análise do adensamento de células com aberrações genéticas, etc. De fato, parece que a cada dia que passa surgem novos horizontes para aplicações dessa tecnologia emergente, que é tema de pesquisas contínuas em universidades e centros de pesquisa de todo o mundo.

Apesar da incrível diversidade de objetivos, todos esses problemas têm uma característica comum: a necessidade de *extrair informações a partir de imagens*.

A noção intuitiva de imagem encerra um conjunto de informações: *sugestões, significados, ambiguidades*, etc. Normalmente, dependendo do contexto envolvido, essas informações têm características completamente diferenciadas: um biólogo examinando através de um microscópio as características dos cromossomos de uma célula é capaz de responder algumas perguntas relativas a herança genética do indivíduo do qual a célula foi extraída, um geólogo examinando feições lineares em fotos aéreas é capaz de responder

perguntas relativas a características geológicas da região. Embora as imagens microscópicas de cromossomos e as imagens áreas de feições geológicas forneçam informações absolutamente não correlacionadas, as duas imagens podem ter características *geométricas* e *espectrais* similares, por exemplo, um cromossomo observado individualmente poderia ser confundido com um pequeno rio ou com um trecho de estrada. A análise de imagens explora exatamente as características geométricas e espectrais comuns a qualquer imagem, de forma que um único conjunto de técnicas é aplicável aos mais diversos contextos.

As pesquisas em análise de imagens iniciaram-se no início da década de sessenta, como parte das atividades do programa espacial americano, conduzido pela NASA. O objetivo original era melhorar a qualidade das imagens captadas pelas sondas espaciais. Com o passar dos anos a tecnologia desenvolvida foi reaproveitada em outros campos e apareceram novos problemas, que motivaram novas descobertas. Historicamente, a área sofreu grande influência das universidades americanas e caracterizou-se pelo uso de técnicas digitais de diversas naturezas: *filtragem linear*, *reconhecimento estatístico de padrões*, *gramáticas formais*, *redes neurais*, *inteligência artificial*, etc.

Por volta do ano de 1964, na École Nationale Supérieure des Mines de Paris, em Fontainebleau, George Matheron e Jean Serra decidiram experimentar uma abordagem singular para resolver problemas de análise de imagens: *extrair informação de imagens a partir de transformações de formas*, realizadas através de dois operadores ou transformações elementares, que eles denominaram *dilatação* e *erosão*.

A dilatação e a erosão foram criadas a partir das noções de *soma* e *subtração de Minkowski*, introduzidas, respectivamente, por Minkowski [Minkow03] e Hadwiger [Hadwig50, Hadwig57]. As transformações produzidas nas imagens binárias (i.e. cujos pixels podem tomar apenas os valores 0 ou 1) pelas dilatações e erosões dependem de padrões predefinidos, chamados *elementos estruturantes*, que as sondam localmente. Na dilatação, verifica-se quando o elemento estruturante toca o objeto (i.e., os pixels da imagem binária que têm o valor 1) e na erosão, quando ele está contido.

Fazendo a analogia com um jogo de montar, as operadores seriam os objetos criados, enquanto as dilatações e as erosões seriam as peças a serem encaixadas. Assim como no jogo de montar as peças são usadas para construir módulos e os módulos são integrados para formar objetos, na estratégia de Matheron e Serra, as dilatações e as erosões são usadas para criar operadores simples e estes são compostos para produzir operadores mais complexos. De fato, este mecanismo levou a resultados muito interessantes: os diversos *esqueletos*, a descrição de formas por *granulometria*, os *filtros morfológicos*, a *extração de contornos*, o *preenchimento de buracos*, etc.

Entre 1964 e 1968, Matheron e Serra, com a ajuda do engenheiro Jean Claude Klein, transformaram a sua idéia em tecnologia, construindo o primeiro analisador morfológico de imagens: o "*Texture Analyser*", um computador com hardware especializado para realizar, com eficiência, dilatações, erosões e operações lógicas entre imagens binárias. Com esse instrumento muitos problemas práticos de análise de imagens foram resolvidos, o que motivou a sua industrialização e provocou um grande impulso das pesquisas em uma nova disciplina: a *Morfologia Matemática* (MM).

O nome Morfologia Matemática, hoje em dia consagrado, apareceu na época no próprio campus de Fontainebleau. A palavra *morfologia* vem do grego e significa estudo (i.e. *logia*) das formas (i.e. *morphos*). Consistente com o significado literal, o propósito original era analisar estruturas geométricas, em imagens microscópicas de amostras de rochas ou metais, e relacionar os resultados com propriedades físicas dos materiais.

Ainda na década de sessenta, Serra e Matheron fundaram o Centre de Morphologie Mathématique de l'École National Supérieure des Mines de Paris. Os principais resultados obtidos nesse centro ao longo de três décadas de pesquisa foram organizados em três livros: *Random Sets and Integral Geometry* [Mather75], *Image Analysis and Mathematical Morphology* [Serra82] e *Image Analysis and Mathemati-*

*cal Morphology, part II* [Serra88]. Esses três livros, hoje clássicos da área, estabeleceram as bases da teoria e indicaram como ela pode ser aplicada a problemas reais de análise de imagens.

As bases teóricas da MM para subconjuntos foram formalizadas pelos próprios Serra e Matheron nos primeiros anos de pesquisa. Estudando as dilatações e erosões, eles descobriram uma coleção de propriedades interessantes e chegaram a um resultado instigante: *qualquer operador invariante por translação (i.t.) e isotônico ou crescente (i.e., que preserva a relação de inclusão) pode ser decomposto como um supremo de erosões ou ínfimo de dilatações*. Em outros termos, as dilatações e erosões são os elementos fundamentais para construir uma ampla classe de operadores. Este resultado teórico vinha a corroborar com a riqueza dos resultados práticos obtidos pelo “Texture Analyser”.

Posteriormente, as idéias estabelecidas para operadores sobre subconjuntos foram estendidas para operadores sobre funções (i.e. imagens em níveis de cinza). A ligação entre os conceitos aplicados a subconjuntos e os conceitos aplicados a funções estabeleceu-se pela noção de *sombra de uma função* (i.e. lugar geométrico dos pontos situados abaixo do gráfico da função). As erosões e as dilatações aplicadas a uma função têm uma relação um para um com erosões e dilatações aplicadas à sombra desta mesma função. Dadas as definições de erosão e dilatação entre funções, pode-se construir uma série de operadores análogos aos conhecidos para subconjuntos.

Os operadores clássicos aplicados a funções reais são os *operadores lineares i.t.*. Estes operadores têm certas características singulares: existe uma relação um para um entre o conjunto dos operadores lineares i.t. e o conjunto das funções reais, isto é, a cada operador linear podemos associar uma única função real, chamada de *função de espalhamento puntual*, e a cada função real podemos associar um único operador linear; o transformado de uma função real por um operador linear é o *produto de convolução* desta função pela função de espalhamento puntual do operador.

As dilatações e erosões i.t. aplicadas a subconjuntos têm certas características semelhantes aos operadores lineares: existe uma relação um para um entre o conjunto das dilatações (resp. erosões) e o conjunto dos subconjuntos, isto é, a cada dilatação (resp. erosão) podemos associar um único subconjunto, chamado de *elemento estruturante*, e a cada subconjunto podemos associar uma única dilatação (resp. erosão); o transformado de um subconjunto por uma dilatação (resp. erosão) é a *soma (resp. diferença) de Minkowski* deste subconjunto pelo elemento estruturante da dilatação (resp. erosão).

Algumas contribuições à teoria da MM para funções foram feitas por Sternberg, que também criou, juntamente com os seus colaboradores do Environment Research Institute of Michigan, um sistema para a análise de imagens biomédicas: o “*Cytnocomputer*”.

A partir da década de oitenta, Matheron e Serra perceberam que os resultados obtidos para conjuntos e funções tinham essencialmente um fator comum: dependiam de uma relação de ordem, a inclusão, no caso de subconjuntos, e a relação de ordem herdada da relação de ordem entre números inteiros, no caso de funções. Este fato motivou a generalização da teoria para o domínio dos *reticulados completos*: conjuntos equipados com uma relação de ordem e tais que o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto existem.

A partir dessa formulação mais abstrata, as definições e propriedades da MM para subconjuntos e funções podiam ser vistas como casos particulares de uma teoria geral. A formulação da MM sobre reticulados completos permitiu também reinterpretar resultados clássicos e vislumbrar novos horizontes: as *limiarizações* de imagens em níveis de cinza, as *funções distâncias* e a *amostragem* podem ser vistas como erosões ou dilatações, etc.

A idéia de decomposição de operadores i.t. e isotônicos em termos de erosões ou dilatações foi retomada por Maragos e por Dougherty e Giardina, que, independentemente, concluíram que existia um conjunto mínimo de erosões ou dilatações suficiente para representar os operadores dessa classe.



Os resultados sobre a decomposição de operadores i.t. e isotônicos foram generalizados por Banon e Barrera para o caso de operadores i.t. não necessariamente isotônicos. Esta extensão foi possível com a introdução de mais duas classes de operadores elementares: as *anti-dilatações* e as *anti-erosões*.

A partir dessas decomposições, Dougherty desenvolveu a técnica de projeto de filtros morfológicos ótimos. A idéia original de Dougherty foi aplicar a teoria de estimação clássica para estimar a base de um operador que é ótimo segundo um certo critério, por exemplo, o mínimo erro absoluto ou o mínimo erro quadrático. Como qualquer operador i.t. tem uma base correspondente, o universo de busca é a própria classe dos operadores i.t.. Esta formulação é o primeiro resultado conhecido que permite o projeto de filtros morfológicos.

Banon and Barrera ainda estenderam o seu resultado original sobre subconjuntos para o caso geral de operadores quaisquer entre dois reticulados completos. Este resultado é ainda mais instigante, pois garante que a MM é capaz de representar qualquer transformação entre reticulados completos. Em particular, a *teoria de circuitos de chaveamento*, classicamente empregada para o projeto de arquiteturas de computadores, pode ser vista como uma caso particular da representação de transformações entre reticulados completos pela MM.

Outros resultados relevantes no domínio dos reticulados completos são a teoria dos *filtros morfológicos*, devida a [Serra88], e a *morfologia sobre grafos*, devida a Vincent. Na sua teoria dos filtros morfológicos, Serra estudou detalhadamente a classe dos operadores isotônicos e idempotentes (i.e., invariantes a autocomposição). Vincent, propôs a generalização de uma coleção de algoritmos clássicos para o domínio dos grafos de vizinhança (i.e., grafos construídos a partir da relação de vizinhança entre objetos).

Em resumo, sob um ponto de vista teórico, a MM estuda decomposições de operadores (i.e. mapeamentos ou transformações) entre reticulados completos em termos de quatro classes de operadores elementares: *dilatações*, *erosões*, *anti-dilatações* e *anti-erosões*. Esta teoria é suportada por vários resultados teóricos, que caracterizam propriedades importantes de várias classes de operadores entre reticulados completos, como os filtros morfológicos, os esqueletos, as granulometrias, etc. Sob um ponto de vista prático, esta técnica tem aplicações em vários Problemas de Análise de Imagens (e.g. *restauração*, *segmentação*, *medidas*, *descrição simbólica*, etc.), assim constituindo-se em uma abordagem unificada para os Problemas de Análise de Imagens. Este fato, é uma característica singular da MM, pois classicamente cada tipo de problema em Análise de Imagens é resolvido por um conjunto de técnicas que não são úteis para outros tipos de problemas.

O estudo da MM ficou restrito ao grupo da École des Mines de Paris por vários anos, antes de encontrar outros adaptos na Europa e Estados Unidos. Um fato que evidenciou o crescimento do interesse da comunidade científica internacional pela MM foi a publicação de números especiais sobre o tema nas revistas *Computer Vision*, *Graphics and Image Processing* e *Signal Processing*, respectivamente, em 1986 e 1989.

Hoje, a MM é uma matéria intensivamente pesquisada em Universidades e Centros de Pesquisa de todo o mundo, contando com dois congressos internacionais específicos sobre o tema, vários livros publicados e em preparação, além de uma extensa coleção de artigos nos periódicos mais importantes das áreas de Análise de imagens e Matemática.

Este livro é uma introdução à MM para subconjuntos e suas aplicações em *Análise de Imagens Binárias Bidimensionais*. Associado ao livro oferecemos um software para análise morfológica de imagens: a *caixa de ferramentas MMach*. Este software roda sobre a plataforma KHOROS, que é um ambiente para Análise de Imagens que tornou-se muito popular. No apêndice A apresentamos uma breve descrição da caixa de ferramentas MMach.

No Capítulo 2 é introduzida a noção de *imagem binária*, assim como, as duas estruturas matemáticas apropriadas para descrevê-las: a *álgebra de Boole* e o *reticulado completo*. As imagens binárias são representadas equivalentemente por *subconjuntos* ou *funções binárias*. Para falar dessa equivalência apresentamos também a noção de *isomorfismo*. As noções de reticulado completo e isomorfismo serão retomadas em outros capítulos para descreverem outros objetos de interesse.

No Capítulo 3, introduzimos a definição axiomática dos *operadores elementares da MM*, assim como, a representação construtiva da dilatação. Na última parte deste capítulo, apresentamos formas de construção de um operador a partir de outros e estudamos as propriedades que são preservadas nestas construções. Mostramos também que as classes dos operadores elementares formam reticulados completos.

No Capítulo 4, estruturamos o domínio dos operadores como um *grupo Abeliano*. Essa estrutura permite definir a operação de *translação* e, conseqüentemente, a classe dos *operadores invariantes por translação* (i.t.). Introduzimos também as noções de *adição e subtração de Minkowski* e verificamos que os operadores elementares i.t. podem ser descritos explicitamente em termos dessas operações. Para aproveitar as propriedades interessantes dos operadores i.t. e evitar os efeitos de borda indesejáveis que eles podem apresentar em certas condições práticas, definimos ainda a classe dos *operadores condicionalmente invariantes por translação*.

No Capítulo 5 voltamos a estudar os operadores elementares definidos no Capítulo 3 em toda a sua generalidade. Dentro desse contexto introduzimos a noção de *dualidade entre dilatações e erosões* como uma correspondência um para um entre o conjunto das dilatações e o conjunto das erosões. Exemplificamos este conceito apresentando duas das mais importantes dualidades conhecidas: aquela baseada na estrutura de reticulado completo e aquela baseada na estrutura de reticulado completo Booleano. A partir da primeira, deduzimos também uma caracterização para as erosões a partir da caracterização para as dilatações apresentada no Capítulo 3.

No Capítulo 6 introduzimos duas novas classes de operadores: as *aberturas* e os *fechamentos*, que ocupam um papel fundamental na área dos *filtros morfológicos*. Primeiramente, apresentamos as noções de *aberturas e fechamentos algébricos*. Em seguida, apresentamos os casos particulares das *aberturas* e dos *fechamentos morfológicos*. Finalmente, estudamos as aberturas e fechamentos i.t. e apresentamos o teorema de Matheron para as aberturas e fechamentos, que estabelece uma forma construtiva para a representação de aberturas e fechamentos algébricos, respectivamente, em termos de aberturas e fechamentos morfológicos.

No Capítulo 7 apresentamos a teoria da *Topologia Digital*, que estuda a aplicação das noções definidas em *Topologia* sobre imagens binárias. A partir da noção de *espaço morfológico*, que se apresenta como uma simplificação da noção de espaço topológico, introduzimos alguns conceitos básicos de Topologia Digital, tais como *conexidade*, *ponto isolado*, *bordas*, *árvores de adjacência*, *homotopia*, etc.

No Capítulo 8 mostramos que a MM pode ser entendida como uma linguagem formal para a descrição de operadores: a *Linguagem Morfológica*. A partir da caracterização da MM como uma linguagem formal conceituamos uma *Máquina Morfológica* como uma implementação particular da Linguagem Morfológica. Assim, um *programa em uma Máquina Morfológica* corresponderá a uma *frase da Linguagem Morfológica*. Finalmente, discutimos a arquitetura de uma Máquina Morfológica típica.

No capítulo 9 apresentamos um conjunto de programas para Máquinas Morfológicas (i.e., operadores da MM) que têm sido usados intensivamente para solucionar problemas de Análise de imagens: a *Caixa de Ferramentas da Morfologia Matemática*. Esses programas são organizados hierarquicamente conforme o número de chamadas que fazem a programas que representam operadores elementares. Uma coleção de exemplos de aplicação ilustram o efeito dessas ferramentas a imagens reais.

## Capítulo 2

# Álgebra e imagens binárias

Em Análise de Imagens, os objetos mais simples que manipulamos são as imagens binárias. Estas imagens são representadas matematicamente por subconjuntos ou, de maneira equivalente, por funções binárias. Nos seus primórdios, a Morfologia Matemática era usada para estudar o relacionamento entre os meios porosos e sua permeabilidade [Mather67, Serra82]. Neste caso, os objetos considerados eram os grãos, que eram representados matematicamente por subconjuntos do espaço Euclidiano de 2 ou 3 dimensões.

Neste capítulo, apresentamos as duas estruturas matemáticas apropriadas para descrever as imagens binárias e suas operações: a álgebra de Boole e o reticulado completo. Para falar da equivalência entre os subconjuntos e as funções binárias, apresentamos também a noção de isomorfismo.

As noções de reticulado completo e isomorfismo, apresentadas neste capítulo, serão usadas também para descrever outros conjuntos de interesse nos próximos capítulos.

### 2.1 Subconjuntos versus funções binárias

Nesta seção, vamos mostrar a equivalência entre subconjuntos e funções binárias.

Seja  $E$  um conjunto não vazio. Um elemento genérico de  $E$  é denotado  $x$ . Temos então  $x \in E$ . Um subconjunto de  $E$  é denotado genericamente por  $X$ . A coleção de todos os subconjuntos de  $E$  é denotada  $\mathcal{P}(E)$ . Temos então  $X \in \mathcal{P}(E)$ .

**Definição 2.1** (função binária) – Uma *função binária* definida sobre  $E$  é um mapeamento de  $E$  em  $\{0, 1\}$ , isto é, para cada elemento de  $E$  a função binária toma um *único* valor 0 ou 1.  $\square$

Uma função binária definida em  $E$  é denotada genericamente por

$$f: E \rightarrow \{0, 1\}.$$

O conjunto de todas as funções binárias definidas em  $E$  é denotado  $\{0, 1\}^E$ . Temos então  $f \in \{0, 1\}^E$ .

Denota-se por  $f(x)$  o elemento de  $\{0, 1\}$  associado ao ponto  $x$  de  $E$  através de  $f$ . O conhecimento de  $f(x)$ , para todo  $x$  em  $E$ , define sem ambigüidade a função  $f$  que passe então a ser denotada

$$f: x \mapsto f(x).$$

O gráfico de uma função é o conjunto de todos os pares  $(x, f(x))$ . O gráfico de uma função  $f$  indica qual é o valor tomado por  $f$  em cada ponto  $x$  de  $E$ . A Figura 2.1 mostra o gráfico de uma função binária  $f$  particu-

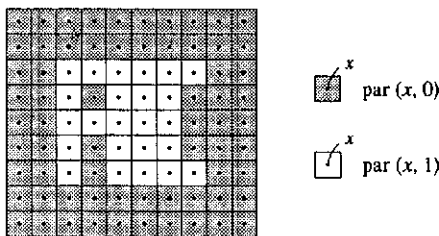


Fig. 2.1 – Gráfico de uma função binária.

lar. Nesta figura, os elementos de  $E$  estão representados por pontos pretos, os pares  $(x, 0)$  estão representados em cinza e os pares  $(x, 1)$  em branco.

Ao nos referirmos ao gráfico de uma função usaremos, quando não houver inconveniência, simplesmente a palavra função a qual ele é equivalente.

A fim de estabelecermos formalmente a equivalência entre as noções de função binária e de subconjunto, precisamos definir as noções de suporte de uma função e de função indicadora de um subconjunto.

O suporte da função  $f \in \{0, 1\}^E$ , denotado  $\text{suporte}(f)$ , é o subconjunto de  $E$  dado por  $\text{suporte}(f) = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$ .

A função indicadora de um subconjunto  $X \in \mathcal{P}(E)$ , denotado  $I_X$ , é a função de  $E$  em  $\{0, 1\}$  dada por

$$I_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (x \in E).$$

A Figura 2.2 mostra um exemplo de um subconjunto  $X$  (conjunto dos pontos pretos na área cinza) e de uma função binária  $f$ . Neste exemplo, a função binária  $f$  coincide com a função indicadora de  $X$  e, por sua vez,  $X$  coincide com o suporte de  $f$ .

**Proposição 2.1** (relação entre subconjuntos e funções binárias) – O mapeamento de  $\mathcal{P}(E)$  em  $\{0, 1\}^E$

$$X \mapsto I_X$$

é uma bijeção, seu inverso é

$$f \mapsto \text{suporte}(f).$$

□

**Prova** – Em primeiro lugar, para todo  $X$  em  $\mathcal{P}(E)$  e  $x$  em  $E$ , temos

$$x \in \text{suporte}(I_X) \Leftrightarrow I_X(x) \neq 0 \quad (\text{definição de suporte})$$

$$\Leftrightarrow I_X(x) = 1 \quad (\text{propriedade das funções em } \{0, 1\}^E)$$

$$\Leftrightarrow x \in X, \quad (\text{definição de função indicadora})$$

em outros termos, para todo  $X$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\text{suporte}(I_X) = X$ . Isto prova que o mapeamento  $X \mapsto I_X$  é injetor.

Em segundo lugar, para todo  $f$  em  $\{0, 1\}^E$  e  $x$  em  $E$ , temos

$$I_{\text{suporte}(f)}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \text{suporte}(f) \quad (\text{definição de função indicadora})$$

$$\Leftrightarrow f(x) \neq 0 \quad (\text{definição de suporte})$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1, \quad (\text{propriedade das funções binárias})$$

isto é,  $I_{\text{suporte}(f)}(x) = f(x)$ ,

em outros termos, para todo  $f$  em  $\{0, 1\}^E$ ,  $I_{\text{suporte}(f)} = f$ . Isto prova que o mapeamento  $X \mapsto I_X$  é sobrejetor e, conseqüentemente, uma bijeção.  $\square$

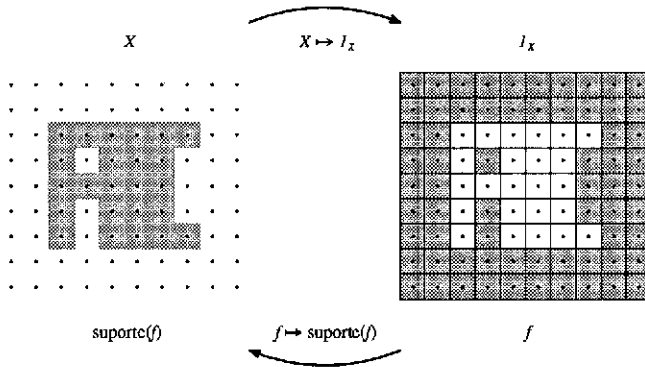


Fig. 2.2 – Função indicadora e suporte.

A Proposição 2.1 mostra que existe uma correspondência um por um entre  $\mathcal{P}(E)$  e  $\{0, 1\}^E$ . A Figura 2.3 ilustra este resultado.

Uma *imagem em preto e branco* ou *imagem binária* definida numa *grade E*, formada por seus *elementos de imagem* ou *pixels* é, então, convenientemente representada tanto por um subconjunto de  $E$  quanto por uma função binária de  $E$  em  $\{0, 1\}$ .

No caso de uma representação por um subconjunto, a imagem binária é assimilada ao subconjunto  $X$  dos elementos  $x$  de  $E$  que representam a *posição* dos pixels *brancos*. Por abuso de linguagem, o subconjunto  $X$  é então chamado de *imagem*.

No caso de uma representação por uma função binária a imagem é assimilada à função binária  $f$  de  $E$  em  $\{0, 1\}$ , que toma o valor 0 nos elementos  $x$  de  $E$  que representam a *posição* dos pixels *pretos* e o valor 1 nos elementos  $x$  de  $E$  que representam a *posição* dos pixels *brancos*. Por abuso de linguagem, a função binária  $f$  é, então, chamada de *imagem* e para todo  $x$  em  $E$ , o par  $(x, f(x))$  é chamado de *pixel da imagem*  $f$ ,  $x$  é a *posição do pixel* e  $f(x)$  é seu *valor*.

O subconjunto  $X$  e a função binária  $f$  da Figura 2.2 são representações matemáticas equivalentes da imagem binária mostrada na Figura 2.4.

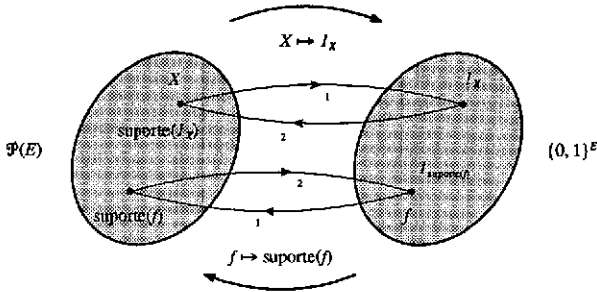


Fig. 2.3 – Bijecção entre os subconjuntos e as funções binárias.

Do ponto de vista computacional, a representação por um subconjunto é realizada através de uma lista de *posições*  $x$  cujos ponteiros não têm nenhum significado particular, enquanto a representação por uma função binária é realizada através de uma lista de *valores*  $f(x)$  cujo ponteiro tem o significado de *posição*  $x$ .

Dependendo da proporção de pixels brancos na imagem, pode-se preferir uma representação ou outra. A representação por subconjuntos é conveniente para imagens cuja proporção de pixels brancos é alta, enquanto a representação por funções binárias é conveniente para imagens com esta proporção baixa.

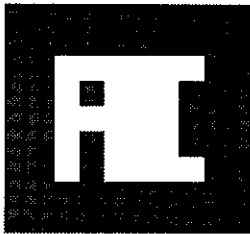


Fig. 2.4 – Imagem binária.

## 2.2 Álgebras de Boole dos subconjuntos e das funções binárias

A manipulação de imagens binárias é convenientemente descrita pelas operações encontradas na estrutura de Álgebra de Boole.

A coleção  $\mathcal{P}(E)$  de todos os subconjuntos de  $E$  provida das operações habituais de união, interseção de subconjuntos e complementação de subconjunto forma uma *álgebra de Boole* denotada  $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \cdot^c)$ . Em outros termos, estas operações verificam os axiomas abaixo [BirLan65, p. 258].

Para todo subconjunto  $A, B$  e  $C$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$A \cup A = A \text{ e } A \cap A = A \quad (\text{idempotência})$$

$$A \cup B = B \cup A \text{ e } A \cap B = B \cap A \quad (\text{comutatividade})$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ e } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{associatividade})$$

$$A \cup (A \cap B) = A \text{ e } A \cap (A \cup B) = A \quad (\text{absorção})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ e } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{distributividade})$$

existem dois subconjuntos  $0$  e  $1$  em  $\mathcal{P}(E)$  tais que

$$A \cup 0 = 0 \cup A = A \text{ e } A \cap 1 = 1 \cap A = A \quad (\text{identidade})$$

$$A \cap 0 = 0 \cap A = 0 \text{ e } A \cup 1 = 1 \cup A = 1 \quad (\text{lei dos nulos})$$

$$A^c \cup A = A \cup A^c = 1 \text{ e } A^c \cap A = A \cap A^c = 0. \quad (\text{complementaridade})$$

Os elementos  $0$  e  $1$  chamados de *elementos nulos* ou *neutros* são, respectivamente, os elementos  $\emptyset$  e  $E$  de  $\mathcal{P}(E)$ .

As operações de união ( $\cup$ ), interseção ( $\cap$ ) e complementação ( $\sim$ ) entre funções binárias são construídas a partir das definições de união ( $\cup$ ), interseção ( $\cap$ ) e complementação ( $\sim$ ) entre os elementos de  $\{0, 1\}$ , dadas nas Tabelas 2.1 e 2.2.

Tabela 2.1 – DEFINIÇÃO DE UNIÃO E INTERSEÇÃO.

$a$	$b$	$a \cup b$	$a \cap b$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Tabela 2.2 – DEFINIÇÃO DE COMPLEMENTAÇÃO.

$a$	$\sim a$
0	1
1	0

**Definição 2.2** (união entre duas funções binárias) – Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas funções binárias definidas em  $E$ . A união das funções binárias  $f_1$  e  $f_2$  é a função binária definida em  $E$ , denotada  $f_1 \cup f_2$  e dada por

$$(f_1 \cup f_2)(x) = f_1(x) \cup f_2(x) \quad (x \in E).$$

A operação de união entre duas funções binárias, denotada  $\cup$ , é o mapeamento dado por

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \cup f_2. \quad \square$$

A Figura 2.6 mostra a união  $f_1 \cup f_2$  das funções  $f_1$  e  $f_2$  da Figura 2.5.

A Figura 2.7 ilustra, através de um bloquinho, a operação de união entre duas funções binárias e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

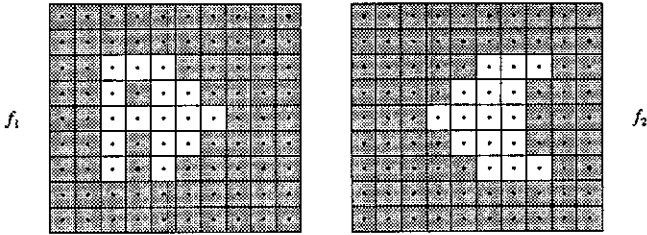


Fig. 2.5 – Duas funções binárias.

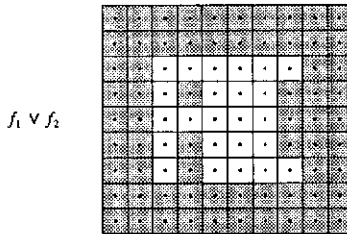


Fig. 2.6 – União de duas funções binárias.

**Definição 2.3** (interseção entre duas funções binárias) – Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas funções binárias definidas em  $E$ . A *interseção das funções binárias*  $f_1$  e  $f_2$  é a função binária definida em  $E$ , denotada  $f_1 \wedge f_2$  e dada por

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x) \quad (x \in E).$$

A operação de *interseção entre duas funções binárias*, denotada  $\wedge$ , é o mapeamento dado por

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \wedge f_2. \quad \square$$

A Figura 2.8 mostra a interseção  $f_1 \wedge f_2$  das funções  $f_1$  e  $f_2$  da Figura 2.5.

A Figura 2.9 ilustra, através de um bloquinho, a operação de interseção entre duas funções binárias e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

**Definição 2.4** (complementação de uma função binária) – Seja  $f$  uma função binária definida em  $E$ . O *complemento da função binária*  $f$  é a função binária definida em  $E$ , denotada  $\sim f$  e dada por

$$(\sim f)(x) = \sim f(x) \quad (x \in E).$$

A operação de *complementação de função binária*, denotada  $\sim$ , é o mapeamento dado por

$$f \mapsto \sim f. \quad \square$$

A Figura 2.10 mostra o complemento  $\sim f$  da função  $f$  da Figura 2.1.

A Figura 2.11 ilustra, através de um bloquinho, a operação de complementação de uma função binária e o resultado obtido em termos de imagens binárias.



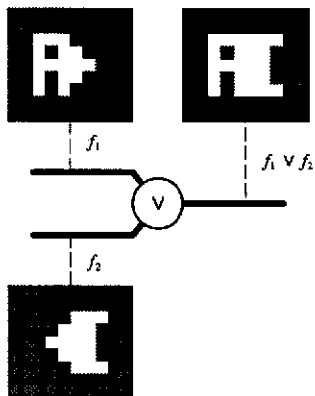


Fig. 2.7 – Operação de união entre duas funções binárias.

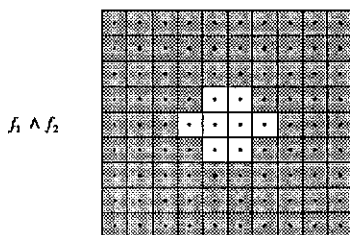


Fig. 2.8 – Interseção de duas funções binárias.

**Proposição 2.2** (álgebra de Boole das funções binárias) – O conjunto  $\{0, 1\}^E$  das funções binárias provido das operações de união, interseção e complementação forma uma álgebra de Boole, denotada  $(\{0, 1\}^E, \vee, \wedge, \sim)$ .  $\square$

**Prova** – O conjunto  $\{0, 1\}$  provido das operações de união, interseção e complementação, definidas nas Tabelas 2.1 e 2.2, é uma álgebra de Boole, onde 0 e 1 são os elementos nulos. Pelo Teorema de Huntington [Birkhoff67, p. 44], basta verificar que para todo  $a, b$  e  $c$  em  $\{0, 1\}$ ,

$$a \wedge b = \sim((\sim a) \vee (\sim b))$$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge (\sim b)) = a.$$

Assim, todos os axiomas da álgebra de Boole são verificados pelos elementos de  $\{0, 1\}$ . Pelas Definições 2.2 – 2.4, os axiomas da álgebra de Boole são também, por herança, verificados pelos elementos de  $\{0, 1\}^E$ . □

Os elementos nulos de  $(\{0, 1\}^E, \vee, \wedge, \neg)$  são as funções  $0 : x \mapsto 0$  e  $1 : x \mapsto 1$ .

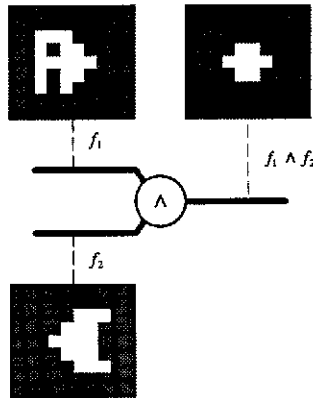


Fig. 2.9 – Operação de interseção entre duas funções binárias.

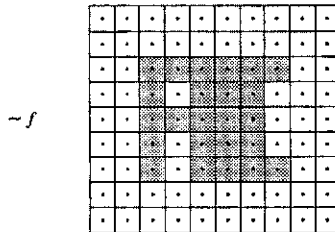


Fig. 2.10 – Complemento de uma função binária.

**Proposição 2.3** (isomorfismo entre álgebras de Boole) – A álgebra de Boole dos subconjuntos de  $E$  e a álgebra de Boole das funções binárias definidas em  $E$ , são isomorfas. Em outros termos,  $X \mapsto I_X$  é um isomorfismo entre álgebras de Boole, isto é,  $X \mapsto I_X$  é uma bijeção e para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$I_{A \cup B} = I_A \vee I_B$$

$$I_{A \cap B} = I_A \wedge I_B$$

$$I_{A^c} = \neg I_A.$$

□

**Prova** – Pela Proposição 2.1,  $X \mapsto I_X$  é uma bijeção. Basta, então, verificar as 3 igualdades do enunciado. □

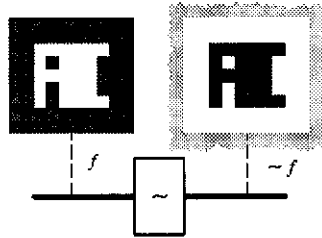


Fig. 2.11 – Operação de complementação de uma função binária.

**Exercício 2.1** (prova da Proposição 2.3) – Usando as definições de função indicadora, e das operações  $\cup$  e  $\cap$ , prove a primeira igualdade do enunciado da Proposição 2.3.  $\square$

Como consequência da Proposição 2.3, temos também que, para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$\text{suporte}(f \vee g) = \text{suporte}(f) \cup \text{suporte}(g)$$

$$\text{suporte}(f \wedge g) = \text{suporte}(f) \cap \text{suporte}(g)$$

$$\text{suporte}(\sim f) = (\text{suporte}(f))^c.$$

A Proposição 2.3 indica que as operações de união, interseção e complementação podem ser efetuadas indiferentemente no domínio dos subconjuntos ou das funções binárias.

Combinando a operação de interseção e a de complementação, define-se a subtração habitual entre subconjuntos. A diferença entre os subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $E$ , denotada  $A - B$ , é o subconjunto  $A \cap B^c$ .

Define-se também uma subtração equivalente entre duas funções binárias em  $\{0, 1\}^E$ .

**Definição 2.5** (subtração entre duas funções binárias) – Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas funções binárias definidas em  $E$ . A diferença das funções binárias  $f_1$  e  $f_2$  é a função binária definida em  $E$ , denotada  $f_1 - f_2$  e dada por

$$f_1 - f_2 = f_1 \wedge (\sim f_2).$$

A operação de subtração entre duas funções binárias, denotada  $-$ , é o mapeamento dado por

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 - f_2. \quad \square$$

A Figura 2.12 mostra a diferença  $f_2 - f_1$  entre as funções  $f_2$  e  $f_1$  da Figura 2.5.

A Figura 2.13 ilustra, através bloquinhos, a operação de subtração entre duas funções binárias e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

**Exercício 2.2** (equivalência entre a subtração entre subconjuntos e a subtração entre funções binárias) – Usando as definições de  $-$  e  $\sim$ , e a Proposição 2.3, mostre que, para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$I_{A-B} = I_A \sim I_B. \quad \square$$

A subtração entre duas imagens binárias é útil para comparar duas imagens como será visto na Seção 2.4.

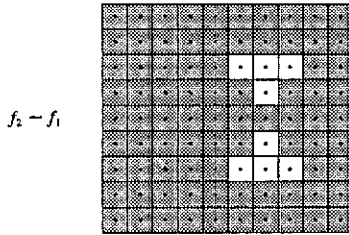


Fig. 2.12 – Diferença entre duas funções.

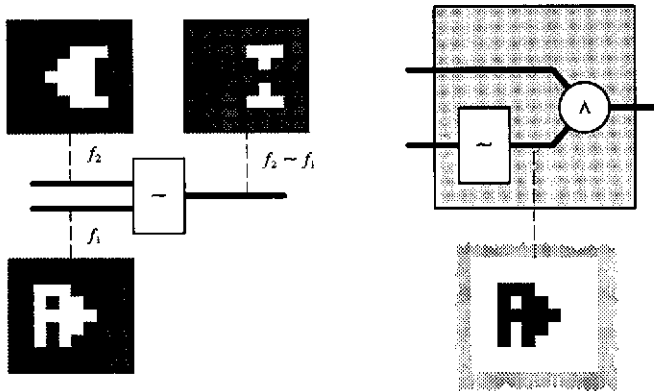


Fig. 2.13 – Operação de subtração entre duas funções binárias.

### 2.3 Extensão das operações de união e interseção

As operações de união e interseção entre dois subconjuntos estendem-se para famílias de subconjuntos.

Seja  $I$  um conjunto, cujos elementos serão chamados de *índices* e serão representados genericamente por  $i$ . Seja  $(A_i)_{i \in I}$  ou simplesmente  $(A_i)$ , quando não houver dúvida sobre o conjunto de índices, uma família de elementos de  $\mathcal{P}(E)$  com índices em  $I$ . Uma família  $(A_i)$  é um mapeamento de  $I$  em  $\mathcal{P}(E)$ .

A união da família dos subconjuntos  $A_i$  é o subconjunto de  $E$  denotado  $\bigcup_{i \in I} A_i$  e definido por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Se  $I$  for vazio então  $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ .

O mapeamento  $(A_i) \mapsto \bigcup_{i \in I} A_i$  é a operação de *união entre os elementos de uma família de subconjuntos*.

Da mesma maneira, a *interseção da família dos subconjuntos*  $A_i$  é o subconjunto de  $E$  denotado  $\bigcap_{i \in I} A_i$  e definido por

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Se  $I$  for vazio, então  $\bigcap_{i \in I} A_i = E$ .

O mapeamento  $(A_i) \mapsto \bigcap_{i \in I} A_i$  é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de subconjuntos*.

As operações de união e interseção de duas funções binárias estendem-se da mesma forma para famílias de funções binárias.

Seja  $(a_i)$  uma família de elementos de  $\{0, 1\}$  com índices em  $I$ . A união da família dos elementos  $a_i$  é o elemento de  $\{0, 1\}$  denotado  $\bigvee_{i \in I} a_i$  e definido por

$$\bigvee_{i \in I} a_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists i \in I, a_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $I$  for vazio, então  $\bigvee_{i \in I} a_i = 0$ .

O mapeamento  $(a_i) \mapsto \bigvee_{i \in I} a_i$  é a operação de *união entre os elementos de uma família de 0 e 1* e é denotada  $\bigvee$ .

Da mesma maneira, a *interseção da família dos elementos*  $a_i$  é o elemento de  $\{0, 1\}$  denotado  $\bigwedge_{i \in I} a_i$  e definido por

$$\bigwedge_{i \in I} a_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \forall i \in I, a_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $I$  for vazio então  $\bigwedge_{i \in I} a_i = 1$ .

O mapeamento  $(a_i) \mapsto \bigwedge_{i \in I} a_i$  é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de 0 e 1* e é denotada  $\bigwedge$ .

Exemplos importantes de famílias de elementos de  $\{0, 1\}$  são as próprias funções binárias. Neste caso, a *união* e a *interseção de uma função binária  $f$* , isto é, respectivamente,

$$\bigvee_{x \in E} f(x) \text{ e } \bigwedge_{x \in E} f(x)$$

são indicadores (valem 0 ou 1) que servem para testar se  $f$  é um elemento nulo da álgebra de Boole  $(\{0, 1\}^E, \vee, \wedge, \sim)$ . Temos

$$f = 0 \Leftrightarrow \bigvee_{x \in E} f(x) = 0 \text{ e } f = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in E} f(x) = 1.$$

A Figura 2.14 ilustra as operações de união e interseção de uma função binária  $f$ .

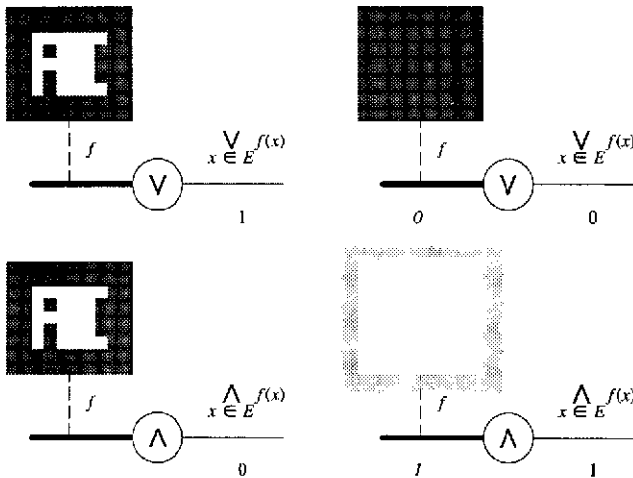


Fig. 2.14 – Operações de união e interseção de uma função binária.

**Definição 2.6** (união de uma família de funções binárias) – Seja  $(f_i)$  uma família de funções binárias de  $\{0, 1\}^E$ , com índices em  $I$ . A *união da família de funções  $f_i$*  é a função binária de  $\{0, 1\}^E$ , denotada  $\bigvee_{i \in I} f_i$  e definida por

$$\left(\bigvee_{i \in I} f_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x) \quad (x \in E).$$

O mapeamento  $(f_i) \mapsto \bigvee_{i \in I} f_i$  é a operação de *união entre os elementos de uma família de funções binárias*. □

Se  $I$  for vazio então  $\bigvee_{i \in I} f_i$  é a função binária constante  $x \mapsto 0$ .

**Definição 2.7** (interseção de uma família de funções binárias) – Seja  $(f_i)$  uma família de funções binárias de  $\{0, 1\}^E$ , com índices em  $I$ . A *interseção da família de funções*  $f_i$  é a função binária de  $\{0, 1\}^E$  denotada

$\bigwedge_{i \in I} f_i$  e definida por

$$\left( \bigwedge_{i \in I} f_i \right)(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x) \quad (x \in E).$$

O mapeamento  $(f_i) \mapsto \bigwedge_{i \in I} f_i$  é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de funções binárias*. □

Se  $I$  for vazio, então  $\bigwedge_{i \in I} f_i$  é a função binária constante  $x \mapsto 1$ .

**Proposição 2.4** (absorção generalizada) – Seja  $(f_i)$  uma família de funções binárias de  $\{0, 1\}^E$ , com índices em  $I$ . Para todo  $k \in I$ ,

$$\left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge f_k = f_k \quad \text{e} \quad \left( \bigwedge_{i \in I} f_i \right) \vee f_k = f_k. \quad \square$$

*Prova* – Para todo  $k \in I$  e todo  $x$  em  $E$ ,

$$f_k(x) = 1 \Leftrightarrow (\exists i \in I, f_i(x) = 1) \text{ e } f_k(x) = 1 \quad (i = k)$$

$$\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i(x) = 1 \right) \text{ e } f_k(x) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de  $\{0, 1\}$ )

$$\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i(x) \right) \wedge f_k(x) = 1 \quad (\text{definição da interseção em } \{0, 1\})$$

$$\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right)(x) \wedge f_k(x) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de  $\{0, 1\}^E$ )

$$\Leftrightarrow \left( \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge f_k \right)(x) = 1, \quad (\text{definição da interseção em } \{0, 1\}^E)$$

isto é,  $f_k(x) = \left( \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge f_k \right)(x)$ ; em outros termos, para todo  $k \in I$ ,

$$f_k = \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge f_k.$$

Usando um raciocínio similar, prova-se também que, para todo  $k \in I$ ,

$$f_k = \left( \bigwedge_{i \in I} f_i \right) \vee f_k. \quad \square$$

**Proposição 2.5** (distributividade generalizada) – Seja  $(f_i)$  uma família de funções binárias de  $\{0, 1\}^E$  com índices em  $I$ . Para todo  $g \in \{0, 1\}^E$ ,

$$\left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge g = \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g) \quad \text{e} \quad \left( \bigwedge_{i \in I} f_i \right) \vee g = \bigwedge_{i \in I} (f_i \vee g). \quad \square$$

**Prova** – Para todo  $g \in \{0, 1\}^E$  e para todo  $x$  em  $E$ ,

$$\begin{aligned} \left( \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge g \right)(x) = 1 &\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right)(x) \wedge g(x) = 1 \\ &\text{(definição da interseção em } \{0, 1\}^E \text{)} \\ &\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i(x) \right) \wedge g(x) = 1 \\ &\text{(definição da união de uma família de elementos de } \{0, 1\}^E \text{)} \\ &\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i(x) \right) = 1 \text{ e } g(x) = 1 \\ &\text{(definição da interseção em } \{0, 1\} \text{)} \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I, f_i(x) = 1) \text{ e } g(x) = 1 \\ &\text{(definição da união de uma família de elementos de } \{0, 1\} \text{)} \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, (f_i(x) = 1 \text{ e } g(x) = 1) \quad \text{(equivalência lógica)} \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, f_i(x) \wedge g(x) = 1 \quad \text{(definição da interseção em } \{0, 1\} \text{)} \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} (f_i(x) \wedge g(x)) = 1 \\ &\text{(definição da união de uma família de elementos de } \{0, 1\} \text{)} \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g)(x) = 1 \quad \text{(definição da interseção em } \{0, 1\}^E \text{)} \\ &\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g) \right)(x) = 1, \\ &\text{(definição da união de uma família de elementos de } \{0, 1\}^E \text{)} \end{aligned}$$

isto é,  $\left( \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge g \right)(x) = \left( \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g) \right)(x)$ . Em outros termos, para todo  $g \in \{0, 1\}^E$ ,

$$\left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge g = \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g).$$



Usando um raciocínio similar, prova-se também que, para todo  $g \in \{0, 1\}^E$ ,

$$\left( \bigwedge_{i \in I} f_i \right) \vee g = \bigwedge_{i \in I} (f_i \vee g). \quad \square$$

## 2.4 Reticulados dos subconjuntos e das funções binárias

O primeiro conceito fundamental em Morfologia Matemática é o de relação de ordem parcial. No caso dos subconjuntos usa-se a relação habitual de inclusão. Esta relação permite a comparação de certos subconjuntos entre si.

A coleção  $\mathcal{P}(E)$  de todos os subconjuntos de  $E$  provida da relação de inclusão ( $\subset$ ) forma um *conjunto parcialmente ordenado*, denotado  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ . Em outros termos, esta relação verifica os três axiomas abaixo de uma *relação de ordem*.

Para todo subconjunto  $A, B$  e  $C$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$A \subset A \quad (\text{reflexividade})$$

$$A \subset B \text{ e } B \subset A \Rightarrow A = B \quad (\text{anti-simetria})$$

$$A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C. \quad (\text{transitividade})$$

A comparação entre certas funções binárias se faz em termos de uma relação construída a partir da definição da relação  $\leq$  entre os elementos de  $\{0, 1\}$ , dada na Tabela 2.3, onde 1 significa que a relação é “verdadeira” e 0 que ela é “falsa”. A Tabela 2.3 dá também a definição da relação  $=$ .

Tabela 2.3 – DEFINIÇÃO DAS RELAÇÕES BINÁRIAS.

$a$	$b$	$a=b$	$a \leq b$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

**Definição 2.8** (relações entre duas funções binárias) – Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas funções binárias definidas em  $E$ . A função binária  $f_1$  é igual à função binária  $f_2$ , denota-se  $f_1 = f_2$ , se e somente se, para todo  $x$  em  $E$ ,  $f_1(x) = f_2(x)$ , isto é,

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow (f_1(x) = f_2(x) \ (x \in E)).$$

A função binária  $f_1$  é menor que a função binária  $f_2$ , denota-se  $f_1 \leq f_2$ , se e somente se, para todo  $x$  em  $E$ ,  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , isto é,

$$f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow (f_1(x) \leq f_2(x) \ (x \in E)).$$

A relação  $=$  entre funções binárias é chamada de *relação de igualdade*. A relação  $\leq$  entre funções binárias é chamada de *relação “menor que”*  $\square$

A relação “menor que” é dita obtida por *ordenamento puntual*.

A Figura 2.15 mostra duas funções comparáveis no sentido que a relação “menor que”, aplicada a estas duas funções, é verdadeira. As funções  $f_1$  e  $f_2$  da Figura 2.5 não são comparáveis, mas as funções  $f_1 \wedge f_2$  e  $f_1 \vee f_2$  (representadas na Figura 2.15) são comparáveis.

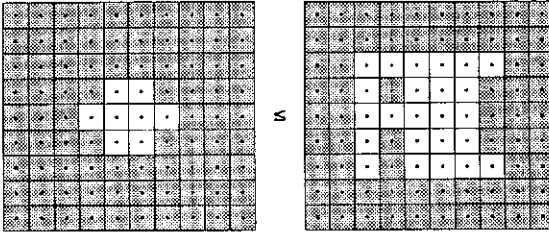


Fig. 2.15 – Duas funções binárias comparáveis.

As Figuras 2.16 e 2.17 ilustram, através de bloquinhos, a comparação entre funções binárias e os resultados obtidos em termos de imagens binárias. Por convenção, 1 na saída de um bloquinho significa que a relação é “verdadeira” e 0 que ela é “falsa”.

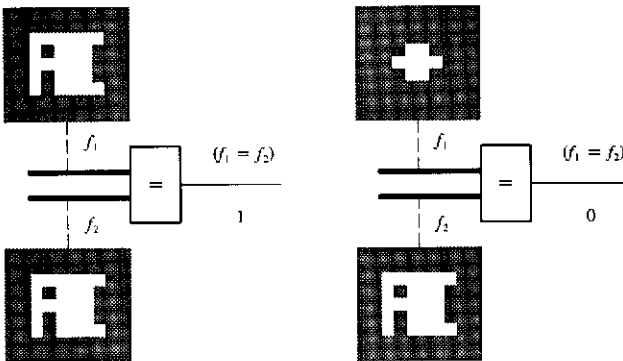


Fig. 2.16 – Relação de igualdade entre funções binárias.

**Proposição 2.6** (conjunto parcialmente ordenado das funções binárias) – O conjunto  $\{0, 1\}^E$  das funções binárias definidas em  $E$ , provido da relação “menor que” forma um conjunto parcialmente ordenado, denotado  $(\{0, 1\}^E, \leq)$ .  $\square$

**Prova** – O conjunto  $\{0, 1\}$  provido da relação  $\leq$  definida na Tabela 2.3 é um conjunto parcialmente ordenado. Basta verificar que esta relação satisfaz os três axiomas de uma relação de ordem. Isto é feito nas Tabelas 2.4 – 2.6.

Então, para todo  $f, g$  e  $h$  em  $\{0, 1\}^E$  e todo  $x \in E$ ,

$$f(x) \leq f(x)$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ e } g(x) \leq f(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ e } g(x) \leq h(x) \Rightarrow f(x) \leq h(x).$$

Isto é, pela Definição 2.8, a relação “menor que” satisfaz também, por herança, os três axiomas de uma relação de ordem. □

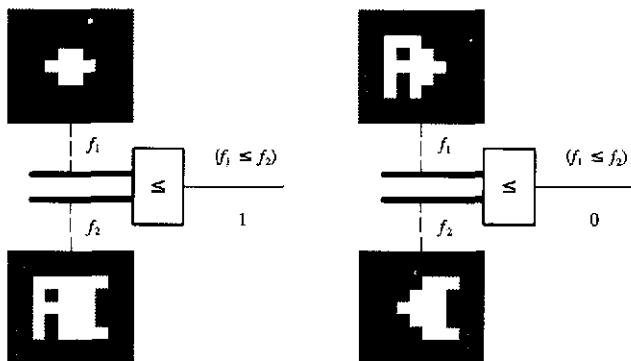


Fig. 2.17 – Relação “menor que” entre funções binárias.

Tabela 2.4 – PROVA DA REFLEXIVIDADE.

$a$	$a \leq a$
0	1
1	1

Tabela 2.5 – PROVA DA ANTI-SIMETRIA.

$a$	$b$	$a \leq b$	$b \leq a$	$a \leq b \text{ e } b \leq a$	$a = b$	$a \leq b \text{ e } b \leq a \Rightarrow a = b$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Tabela 2.6 – PROVA DA TRANSITIVIDADE.

$a$	$b$	$c$	$a \leq b$	$b \leq c$	$a \leq b \text{ e } b \leq c$	$a \leq c$	$a \leq b \text{ e } b \leq c \Rightarrow a \leq c$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

**Proposição 2.7** (consistência entre álgebra de Boole e conjunto parcialmente ordenado) – Para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0,1\}^E$ , as seguintes proposições são equivalentes

- (1)  $f \leq g$
- (2)  $f \vee g = g$
- (3)  $f \wedge g = f$
- (4)  $(\sim f) \vee g = 1$
- (5)  $f \wedge (\sim g) = 0$
- (6)  $f \sim g = 0$ .

□

**Prova** – Vamos provar que (1) e (2) são equivalentes. Na Tabela 2.7 prova-se que, para todo  $a$  e  $b$  em  $\{0,1\}$ ,  $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ . Então, para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0,1\}^E$  e todo  $x \in E$ ,

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g(x) = g(x).$$

Isto é, pelas Definições 2.2 e 2.8, para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0,1\}^E$ ,

$$f \leq g \Leftrightarrow f \vee g = g.$$

Vamos provar que (2) e (3) são equivalentes. Supondo que  $f \vee g = g$ , para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0,1\}^E$ ,

$$f = f \wedge (f \vee g) \quad (\text{absorção})$$

$$= f \wedge g, \quad (\text{hipótese } f \vee g = g)$$

isto é,  $f \vee g = g \Rightarrow f \wedge g = f$ .

Supondo que  $f \wedge g = f$ , para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0,1\}^E$ ,

$$g = (f \wedge g) \vee g \quad (\text{absorção})$$

$$= f \vee g, \quad (\text{hipótese } f \wedge g = f)$$

isto é,  $f \vee g = g \Leftrightarrow f \wedge g = f$ .

Vamos provar que (3) e (4) são equivalentes. Supondo que  $f \wedge g = f$ , para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0,1\}^E$ ,

$$1 = (\sim f) \vee f \quad (\text{complementaridade})$$

$$= (\sim f) \vee (f \wedge g) \quad (\text{hipótese } f \wedge g = f)$$

$$\begin{aligned}
 &= ((\sim f) \vee f) \wedge ((\sim f) \vee g) && \text{(distributividade)} \\
 &= 1 \wedge ((\sim f) \vee g) && \text{(complementaridade)} \\
 &= (\sim f) \vee g, && \text{(identidade)}
 \end{aligned}$$

isto é,  $f \wedge g = f \Rightarrow (\sim f) \vee g = 1$ .

Supondo que  $(\sim f) \vee g = 1$ , para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$\begin{aligned}
 f &= f \wedge 1 && \text{(identidade)} \\
 &= f \wedge ((\sim f) \vee g) && \text{(hipótese } (\sim f) \vee g = 1) \\
 &= (f \wedge (\sim f)) \vee (f \wedge g) && \text{(distributividade)} \\
 &= 0 \vee (f \wedge g) && \text{(complementaridade)} \\
 &= f \wedge g, && \text{(identidade)}
 \end{aligned}$$

isto é,  $f \wedge g = f \Leftarrow (\sim f) \vee g = 1$ .

A prova da equivalência entre (2) e (5) é similar a prova anterior.

Finalmente a prova da equivalência entre (5) e (6) decorre da Definição 2.5. □

Tabela 2.7 – PROVA DA CONSISTÊNCIA.

$a$	$b$	$a \leq b$	$a \vee b$	$a \vee b = b$	$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

**Exercício 2.3** (conservação da relação de ordem) – Usando a Proposição 2.7, mostre uma das duas propriedades abaixo. Para todo  $f, g$  e  $h$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$f \leq g \Rightarrow f \vee h \leq g \vee h$$

$$f \leq g \Rightarrow f \wedge h \leq g \wedge h. \quad \square$$

**Exercício 2.4** (involução e leis de Morgan) – Usando a Proposição 2.7 e os axiomas apropriados de álgebra de Boole e de relação de ordem, mostre uma das duas propriedades abaixo. Para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$\sim \sim f = f \quad \text{(involução)}$$

$$\sim (f \vee g) = (\sim f) \wedge (\sim g) \quad \text{e} \quad \sim (f \wedge g) = (\sim f) \vee (\sim g) \quad \text{(lei de Morgan)} \quad \square$$

**Exercício 2.5** (antitonia) – Usando a Proposição 2.7 e a lei de Morgan, mostre que, para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$f \leq g \Leftrightarrow (\sim g) \leq (\sim f). \quad \text{(antitonia)} \quad \square$$

Pela Proposição 2.7 e pela definição de união de uma função binária, temos uma definição equivalente para a relação “menor que” ( $\leq$ ) entre funções binárias: para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$f \leq g \Leftrightarrow \bigvee_{x \in E} (f \sim g)(x) = 0.$$

Adotando a convenção que 1 significa que a relação “menor que” ( $\leq$ ) é “verdadeira” e 0 que ela é “falsa”, a expressão acima é equivalente à expressão abaixo

$$(f \leq g) = \sim \bigvee_{x \in E} (f \sim g)(x).$$

A Figura 2.18 ilustra o algoritmo para testar se duas funções binárias são comparáveis. Este algoritmo é derivado da igualdade acima.

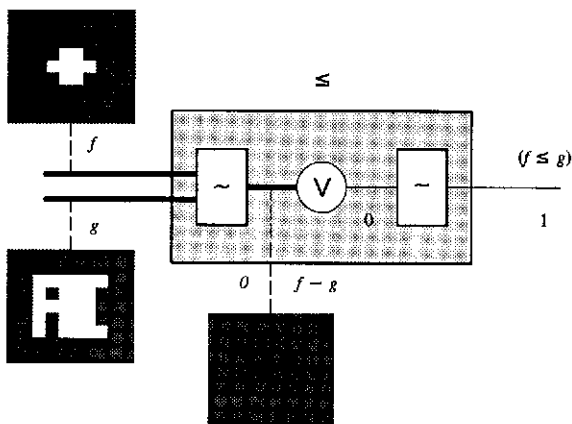


Fig. 2.18 – Algoritmo de teste de comparabilidade entre funções binárias.

Finalmente, usando as propriedades de reflexividade e de anti-simetria da relação “menor que” ( $\leq$ ), temos uma definição equivalente para a relação de igualdade ( $=$ ) entre funções binárias: para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$f = g \Leftrightarrow f \leq g \text{ e } g \leq f.$$

Adotando a mesma convenção (1 para “verdadeiro” e 0 para “falso”), a expressão acima é equivalente a expressão abaixo

$$(f = g) = (f \leq g) \wedge (g \leq f).$$

A Figura 2.19 ilustra o algoritmo para testar se duas funções binárias são iguais. Este algoritmo é derivado da igualdade acima.

**Exercício 2.6** (propriedade da união e da interseção de uma família de funções binárias) – Seja  $(f_i)$  uma família de funções binárias de  $\{0, 1\}^E$ , com índices em  $I$ . Usando as Proposições 2.4 e 2.7, prove que, para todo  $k \in I$ ,

$$f_k \leq \bigvee_{i \in I} f_i \text{ e } \bigwedge_{i \in I} f_i \leq f_k. \quad \square$$

Vamos agora introduzir uma estrutura algébrica, extremamente importante em Morfologia Matemática, a de reticulado completo, introduzida por G. Birkhoff em 1933.

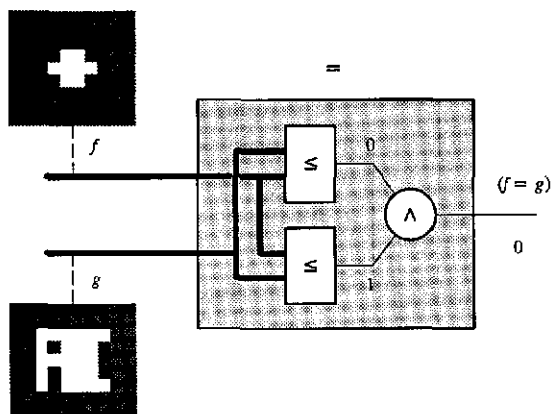


Fig. 2.19 – Algoritmo de teste de igualdade entre funções binárias.

Seja  $\mathfrak{K}$  uma subcoleção não vazia de  $\mathcal{P}(E)$  e  $A$  um elemento de  $\mathcal{P}(E)$ . O elemento  $A$  é um *limitante superior* (l.s.) de  $\mathfrak{K}$  (em  $\mathcal{P}(E)$ ) se e somente se  $A \in \mathcal{P}(E)$  e  $X \subset A$  para todo  $X \in \mathfrak{K}$ . O elemento  $A$  é um *limitante inferior* (l.i.) de  $\mathfrak{K}$  (em  $\mathcal{P}(E)$ ) se e somente se  $A \in \mathcal{P}(E)$  e  $A \subset X$  para todo  $X \in \mathfrak{K}$ .

Por exemplo, para qualquer subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $E$  é um limitante superior e  $\emptyset$  é um limitante inferior.

Se  $\mathfrak{K}$  for vazio, então qualquer elemento de  $\mathcal{P}(E)$  (inclusive o subconjunto vazio) é um limitante superior e inferior de  $\mathfrak{K}$ .

A Figura 2.20 (resp. 2.21) mostra, através de um diagrama de Venn, um subconjunto  $A$  que é um limitante superior (resp. inferior) da subcoleção  $\mathfrak{K}$  contendo os subconjuntos  $X_1$  e  $X_2$ .

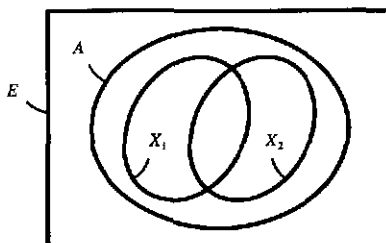


Fig. 2.20 – Limitante superior de dois subconjuntos.

Pela anti-simetria da inclusão, existe no máximo (mas pode não existir) um limitante superior (resp. inferior) de  $\mathfrak{K}$  em  $\mathfrak{K}$ . Quando este limitante superior (resp. inferior) existir ele é chamado de *maior* (resp. *menor*) elemento de  $\mathfrak{K}$ .

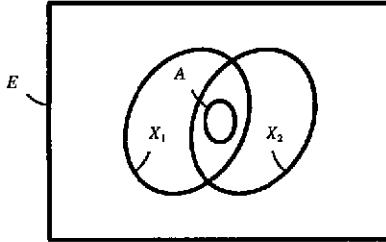


Fig. 2.21 – Limitante inferior de dois subconjuntos.

A subcoleção  $\mathfrak{K}$  contendo os subconjuntos  $X_1$  e  $X_2$  das Figuras 2.20 e 2.21 não possui nem maior nem menor elemento. A coleção  $\mathcal{P}(E)$  possui um maior elemento que é  $E$  e um menor elemento que é  $\emptyset$ .

Seja  $X$  um elemento de uma subcoleção  $\mathfrak{K}$ . Se  $Y$  é o maior elemento de  $\mathfrak{K}$ , então  $Y \subset X$  implica que  $Y = X$  (pois, pela definição de maior elemento,  $X \in \mathfrak{K} \Rightarrow X \subset Y$ ). Se  $Y$  é o menor elemento de  $\mathfrak{K}$ , então  $X \subset Y$  implica que  $Y = X$  (pois, pela definição de menor elemento,  $X \in \mathfrak{K} \Rightarrow Y \subset X$ ).

Com todos os ingredientes acima, podemos agora introduzir dois conceitos de destaque que servirão na definição de reticulado completo.

O *supremo* de  $\mathfrak{K}$  (em  $\mathcal{P}(E)$ ), denotado  $\sup \mathfrak{K}$ , é, se existir, o menor dos limitantes superiores de  $\mathfrak{K}$  em  $\mathcal{P}(E)$ . Em outros termos, para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$Y \text{ l.s. de } \mathfrak{K} \Leftrightarrow \sup \mathfrak{K} \subset Y.$$

O *ínfimo* de  $\mathfrak{K}$  (em  $\mathcal{P}(E)$ ), denotado  $\inf \mathfrak{K}$ , é, se existir, o maior dos limitantes inferiores de  $\mathfrak{K}$  em  $\mathcal{P}(E)$ . Em outros termos, para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$Y \text{ l.i. de } \mathfrak{K} \Leftrightarrow Y \subset \inf \mathfrak{K}.$$

O supremo de  $\emptyset$  é o menor elemento de  $\mathcal{P}(E)$ , isto é,  $\emptyset$ . O ínfimo de  $\emptyset$  é o maior elemento de  $\mathcal{P}(E)$ , isto é,  $E$ . Em outros termos,  $\sup \emptyset = \emptyset$  e  $\inf \emptyset = E$ .

No caso de  $\mathfrak{K}$  ser a subcoleção contendo dois subconjuntos  $X_1$  e  $X_2$  o supremo de  $\mathfrak{K}$  é o subconjunto  $X_1 \cup X_2$  e o ínfimo é o subconjunto  $X_1 \cap X_2$ .

**Exercício 2.7** (propriedade do maior e do menor elemento de um conjunto) – Mostre que, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}(E)$  e  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A$  é o maior (resp. menor) elemento de  $\mathfrak{K}$  se e somente se  $A = \sup \mathfrak{K}$  (resp.  $A = \inf \mathfrak{K}$ ) e  $A \in \mathfrak{K}$ .  $\square$

**Exercício 2.8** (propriedade do supremo e do ínfimo) – Mostre que, para todas subcoleções  $\mathfrak{K}_1$  e  $\mathfrak{K}_2$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \Rightarrow \sup \mathfrak{K}_1 \subset \sup \mathfrak{K}_2 \text{ e } \inf \mathfrak{K}_2 \subset \inf \mathfrak{K}_1. \quad \square$$

O conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  provido das operações habituais de união e interseção, estendidas às famílias em  $\mathcal{P}(E)$ , forma um *reticulado completo*. Em outros termos, para todo conjunto de índices  $I$ , estas operações verificam os dois axiomas abaixo [Szász71, p. 50].



Para toda família  $(A_i)_{i \in I}$  de subconjuntos de  $E$ ,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \sup \mathcal{A}_I \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \inf \mathcal{A}_I,$$

onde  $\mathcal{A}_I$  é a imagem de  $I$  através da família  $(A_i)_{i \in I}$ , isto é,

$$\mathcal{A}_I = \{A \in \mathcal{P}(E) : \exists i \in I, A_i = A\}.$$

De uma maneira equivalente, podemos dizer que o conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  é um reticulado completo porque toda subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$  possui um supremo e um ínfimo.

O conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{P}(E), \supseteq)$  possui um maior elemento que é  $E$  e um menor elemento que é  $\emptyset$ .

**Proposição 2.8** (reticulado das funções binárias) – O conjunto parcialmente ordenado  $(\{0, 1\}^E, \leq)$  das funções binárias definidas em  $E$ , provido das operações de união e interseção, forma um reticulado completo. Em outros termos, para todo conjunto de índices  $I$ , estas operações verificam os dois axiomas abaixo.

Para toda família  $(f_i)_{i \in I}$  de funções binárias em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$\bigvee_{i \in I} f_i = \sup \mathcal{F}_I \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i \in I} f_i = \inf \mathcal{F}_I,$$

onde  $\mathcal{F}_I$  é a imagem de  $I$  através a família  $(f_i)_{i \in I}$ , isto é,

$$\mathcal{F}_I = \{f \in \mathcal{P}(E) : \exists i \in I, f_i = f\}.$$

De uma maneira equivalente, o conjunto parcialmente ordenado  $(\{0, 1\}^E, \leq)$  é um reticulado completo porque todo subconjunto de  $\{0, 1\}^E$  possui um supremo e um ínfimo.  $\square$

**Prova** – Seja  $(f_i)$  uma família de funções binárias em  $\{0, 1\}^E$  com índices em  $I$ . Para todo  $g \in \{0, 1\}^E$ , em primeiro lugar,

$$g \text{ l.s. de } \mathcal{F}_I \Leftrightarrow \forall i \in I, f_i \leq g \quad (\text{definição de l.s. e de } \mathcal{F}_I)$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} f_i = \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g) \quad (\text{Proposição 2.7})$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} f_i = \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \wedge g \quad (\text{Proposição 2.5})$$

$$\Leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \leq g; \quad (\text{Proposição 2.7})$$

em segundo lugar,

$$\left( \bigvee_{i \in I} f_i \right) \leq g \Rightarrow \forall i \in I, f_i \leq g. \quad (\text{Exercício 2.6 e transitividade de } \leq)$$

$$\Leftrightarrow g \text{ l.s. de } \mathcal{F}_I. \quad (\text{definição de l.s. e de } \mathcal{F}_I)$$

Pela definição de supremo, isto prova que, para toda família  $(f_i)_{i \in I}$  de funções binárias em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$\bigvee_{i \in I} f_i = \sup \mathcal{F}_I,$$

Usando o raciocínio acima, prova-se também que, para toda família  $(f_i)_{i \in I}$  de funções binárias em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$\bigwedge_{i \in I} f_i = \inf \mathfrak{F}_F \quad \square$$

O conjunto parcialmente ordenado  $(\{0, 1\}^E, \leq)$  possui um maior elemento que é  $1 : x \mapsto 1$  e um menor elemento que é  $0 : x \mapsto 0$ .

Pela Proposição 2.8, para todo  $f_1$  e  $f_2$  em  $\{0, 1\}^E$ , distintos,

$$f_1 \vee f_2 = \sup\{f_1, f_2\} \quad \text{e} \quad f_1 \wedge f_2 = \inf\{f_1, f_2\}.$$

**Exercício 2.9** (comparação entre a união e a interseção de duas funções binárias) – Usando o resultado acima e a definição de supremo e ínfimo, mostre que  $f_1 \wedge f_2 \leq f_1 \vee f_2$ .  $\square$

**Proposição 2.9** (isomorfismo de reticulados) – O reticulado dos subconjuntos de  $E$  e o reticulado das funções binárias definidas em  $E$ , são isomorfos. Em outros termos,  $X \mapsto I_X$  é um isomorfismo de reticulado, isto é (pelo Lema 2 em [Birkho67, p. 24]),  $X \mapsto I_X$  é uma bijeção e para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathfrak{P}(E)$ ,

$$A \subset B \Leftrightarrow I_A \leq I_B. \quad (\text{isotonia dupla}) \quad \square$$

**Prova** – Pela Proposição 2.1,  $X \mapsto I_X$  é uma bijeção. Basta, então, verificar a isotonia dupla. Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathfrak{P}(E)$ ,

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \quad (x \in E)) && (\text{definição de } \subset) \\ &\Leftrightarrow (I_A(x) = 1 \Rightarrow I_B(x) = 1 \quad (x \in E)) && (\text{definição de } I_A \text{ e } I_B) \\ &\Leftrightarrow (I_A(x) \leq I_B(x) \quad (x \in E)) && (\text{definição de } \leq \text{ em } \{0, 1\}) \\ &\Leftrightarrow I_A \leq I_B && (\text{definição de } \leq \text{ em } \{0, 1\}^E) \end{aligned} \quad \square$$

Uma consequência da Proposição 2.9 é que as operações de união e interseção (estendidas) comutam com o mapeamento  $X \mapsto I_X$ , isto é, para toda família  $(A_i)_{i \in I}$  de subconjuntos de  $E$ ,

$$I_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigvee_{i \in I} I_{A_i} \quad \text{e} \quad I_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigwedge_{i \in I} I_{A_i}$$

Como consequência da Proposição 2.9, temos também, para todo  $f$  e  $g$  em  $\{0, 1\}^E$ ,

$$f \leq g \Leftrightarrow \text{suporte}(f) \subset \text{suporte}(g). \quad (\text{isotonia dupla})$$

A Proposição 2.9 indica que a comparação pode ser efetuada indiferentemente no domínio dos subconjuntos ou das funções binárias.

## Capítulo 3

# Operadores sobre subconjuntos

No capítulo anterior foram definidas vários mapeamentos, chamados de operações, envolvendo subconjuntos ou funções binárias. Neste capítulo, vamos introduzir outros mapeamentos que chamaremos de *operadores*. Estes mapeamentos generalizam as operações unárias no sentido que, relativamente a um dado ponto  $x$  de  $E$ , o resultado da transformação de um subconjunto ou de uma função binária vai depender geralmente do subconjunto ou da função binária como um todo. Isto é próprio de toda transformação que é construída a partir de uma noção de vizinhança.

A Morfologia Matemática estuda a decomposição de operadores entre reticulados completos em termos de quatro classes de operadores: as dilatações, as erosões, as anti-dilatações e as anti-erosões. Estes operadores, chamadas de elementares ou primitivos, têm um papel fundamental porque a partir deles pode ser construído qualquer outro operador [BanBar91, BanBar93].

Modernamente os operadores elementares da Morfologia Matemática são apresentados de forma axiomática e a partir dessa definição são deduzidas as respectivas formas construtivas, chamadas caracterização dos operadores elementares, que permitem as implementações em computadores. Seguindo essa tendência, neste capítulo, introduzimos os operadores elementares de forma axiomática e apresentamos a caracterização das dilatações. No Capítulo 12, deduziremos a caracterização das erosões a partir da caracterização das dilatações.

Na última parte deste capítulo, apresentamos formas de construção de um operador a partir de outros e estudamos propriedades que são preservadas nestas construções.

### 3.1 Operadores

Daqui para frente, usaremos a representação das imagens binárias por subconjuntos, isto é, a representação tradicional, em Morfologia Matemática, para as imagens binárias. Denotaremos simplesmente por  $\mathcal{P}$  a coleção  $\mathcal{P}(E)$ , quando não houver dúvida sobre o conjunto  $E$ .

**Definição 3.1** (operador) – Um *operador* sobre  $\mathcal{P}$  é um mapeamento de  $\mathcal{P}$  em  $\mathcal{P}$ . □

Com esta definição, a complementação, definida no capítulo anterior, além de ser uma operação é um operador (degenerado).

O conjunto de todos os operadores sobre  $\mathcal{P}$  será denotado  $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ . Um operador sobre  $\mathcal{P}$  é denotado genericamente pela letra grega  $\psi$ . Temos então  $\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ .

Um operador sobre  $\mathcal{P}$  transforma um subconjunto  $X$  em  $\mathcal{P}$  em um subconjunto  $Y$  em  $\mathcal{P}$ . A Figura 3.1 mostra a representação de um operador, através um bloquinho com uma entrada e uma saída.

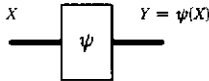


Fig. 3.1 – Um operador.

Nesta seção, vamos apresentar algumas propriedades importantes que se aplicam aos operadores.

**Definição 3.2** (extensividade e anti-extensividade) – Um operador  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}$  é

*extensivo* se e somente se, para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$A \subset \psi(A), \quad (\text{extensividade})$$

*anti-extensivo* se e somente se, para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\psi(A) \subset A. \quad (\text{anti-extensividade})$$

□

**Definição 3.3** (idempotências) – Um operador  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}$  é

*idempotente de tipo 1* ou simplesmente *idempotente* se e somente se, para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\psi(\psi(A)) = \psi(A), \quad (\text{idempotência de tipo 1 ou simplesmente idempotência})$$

*idempotente de tipo 2* se e somente se, para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\psi(\psi(A)) = A. \quad (\text{idempotência de tipo 2})$$

□

O operador “limpeza”  $A \mapsto \emptyset$  é um exemplo de operador idempotente de tipo 1.

A complementação  $A \mapsto A^c$  definida no capítulo anterior é um exemplo de operador idempotente de tipo 2, para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ , temos

$$(A^c)^c = A.$$

**Definição 3.4** (isotonia e antitonia) – Um operador  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}$  é

*isotônico* (ou *crecente*) se e somente se, para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$A \subset B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B). \quad (\text{isotonia})$$

*antitônico* (ou *decrecente*) se e somente se, para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$A \subset B \Rightarrow \psi(B) \subset \psi(A). \quad (\text{antitonia})$$

□

A complementação é um exemplo de operador antitônico, para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ , temos

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c.$$

A complementação é uma *involução*, isto é, ela é idempotente de tipo 2 e antitônica.

Vamos definir de maneira equivalentes as propriedades de isotonia e antitonia.

Seja  $\mathfrak{K}$  uma subcoleção de  $\mathcal{P}$ . Denotaremos por  $\psi(\mathfrak{K})$  a imagem de  $\mathfrak{K}$  através de  $\psi$ , isto é,

$$\psi(\mathfrak{K}) = \{Y \in \mathcal{P} : \exists X \in \mathfrak{K}, Y = \psi(X)\}.$$

**Proposição 3.1** (definições equivalentes de um operador isotônico) – Seja  $\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ . As três proposições seguintes são equivalentes:

- (1)  $\psi$  é isotônico;
- (2) para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,  $\sup\psi(\mathfrak{K}) \subset \psi(\sup\mathfrak{K})$ ;
- (3) para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,  $\psi(\inf\mathfrak{K}) \subset \inf\psi(\mathfrak{K})$ . □

**Prova** ([HeiRon90, Lemma 2.1, p. 26(1)] – Vamos provar que (1) implica (2).

$$\begin{aligned} \psi \text{ é isotone} &\Rightarrow \forall \mathfrak{K} \subset \mathcal{P}, \forall X \in \mathfrak{K}, \psi(X) \subset \psi(\sup\mathfrak{K}) && \text{(definição de isotonia e } X \subset \sup\mathfrak{K}) \\ &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{K} \subset \mathcal{P}, \psi(\sup\mathfrak{K}) \text{ l.s. de } \psi(\mathfrak{K}) && \text{(definições de l.s. e } \psi(\mathfrak{K})) \\ &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{K} \subset \mathcal{P}, \sup\psi(\mathfrak{K}) \subset \psi(\sup\mathfrak{K}). && \text{(definição de supremo)} \end{aligned}$$

Vamos provar que (2) implica (1).

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{K} \subset \mathcal{P}, \sup\psi(\mathfrak{K}) \subset \psi(\sup\mathfrak{K}) &\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}, \psi(A) \cup \psi(B) \subset \psi(A \cup B) && \text{(propriedade de U)} \\ &\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}, (B = A \cup B \Rightarrow \psi(A) \cup \psi(B) \subset \psi(A \cup B)) && \text{(implicação lógica)} \\ &\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}, (B = A \cup B \Rightarrow \psi(A) \cup \psi(B) \subset \psi(B)) && \text{(equivalência lógica)} \\ &\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}, (B = A \cup B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B)) && \text{(propriedade de U e transitividade de } \subset) \\ &\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}, (A \subset B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B)) && \text{(consistência de U e } \subset) \\ &\Leftrightarrow \psi \text{ é isotone.} && \text{(definição de isotonia)} \end{aligned}$$

De uma maneira similar, prova-se que (1) e (3) são equivalentes. □

**Proposição 3.2** (definições equivalentes de um operador antitônico) – Seja  $\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ . As três proposições seguintes são equivalentes:

- (1)  $\psi$  é antitônico;
- (2) para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,  $\psi(\sup\mathfrak{K}) \subset \inf\psi(\mathfrak{K})$ ;
- (3) para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,  $\sup\psi(\mathfrak{K}) \subset \psi(\inf\mathfrak{K})$ . □

**Prova** – A prova é similar a da Proposição 3.1. □

## 3.2 Dilatações, erosões, anti-dilatações e anti-erosões

Em seguida vamos dar a definição de quatro classes (ou subconjuntos) fundamentais de operadores. Os operadores destas classes serão chamados de *operadores elementares* da Morfologia Matemática. Usamos esta terminologia porque a decomposição de qualquer operador pode ser feita em termos destes operadores [BanBar93].

**Definição 3.5** (dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão) – Um operador  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}$  é

uma *dilatação* se e somente se, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\psi(\sup\mathfrak{K}) = \sup\psi(\mathfrak{K}),$$

uma *erosão* se e somente se, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\psi(\inf\mathfrak{K}) = \inf\psi(\mathfrak{K}),$$

uma *anti-dilatação* se e somente se, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\psi(\sup\mathfrak{K}) = \inf\psi(\mathfrak{K}),$$

uma *anti-erosão* se e somente se, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\psi(\inf\mathfrak{K}) = \sup\psi(\mathfrak{K}). \quad \square$$

O conjunto das dilatações é denotado  $\Delta$ , o das erosões  $E$ , o das anti-dilatações  $\Delta^a$  e o das anti-erosões  $E^a$ . Uma dilatação é denotada genericamente por  $\delta$ , uma erosão por  $\varepsilon$ , uma anti-dilatação por  $\delta^a$  e uma anti-erosão por  $\varepsilon^a$ . Para um dado subconjunto  $X$ , os subconjuntos  $\delta(X)$ ,  $\varepsilon(X)$ ,  $\delta^a(X)$  e  $\varepsilon^a(X)$  chamam-se, respectivamente, de *dilatação*, *erosão*, *anti-dilatação* e *anti-erosão* de  $X$ .

Pela Definição 3.5, fazendo  $\mathfrak{K} = \emptyset$  e lembrando que  $\sup\emptyset = \emptyset$  e  $\inf\emptyset = E$ , temos, para toda dilatação  $\delta$ , erosão  $\varepsilon$ , anti-dilatação  $\delta^a$  e anti-erosão  $\varepsilon^a$ , as igualdades úteis abaixo

$$\delta(\emptyset) = \emptyset,$$

$$\varepsilon(E) = E,$$

$$\delta^a(\emptyset) = E,$$

$$\varepsilon^a(E) = \emptyset.$$

**Proposição 3.3** (isotonia das dilatações e erosões) – As dilatações e as erosões são isotônicas. □

*Prova* – As dilatações e as erosões verificam, respectivamente, as proposições (2) e (3) da Proposição 3.1, o que prova que elas são isotônicas. □

**Proposição 3.4** (antitonia das anti-dilatações e anti-erosões) – As anti-dilatações e as anti-erosões são antitônicas. □

*Prova* – As anti-dilatações e as anti-erosões verificam, respectivamente, as proposições (2) e (3) da Proposição 3.2, o que prova que elas são antitônicas. □

Pelas propriedades das operações de união e interseção estendidas às famílias de subconjuntos, podemos definir de uma maneira equivalente as dilatações e erosões. Um operador sobre  $\mathcal{P}$  é uma dilatação se e somente se ele comuta com a união, e uma erosão se e somente se ele comuta com a interseção, isto é,  $\delta \in \Delta$  e  $\varepsilon \in E$  se e somente se, para toda família  $(X_i)_{i \in I}$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\bigcup_{i \in I} \delta(X_i) = \delta\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \quad \text{e} \quad \varepsilon\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varepsilon(X_i).$$

Pelas Proposições 3.1 e 3.3, para toda dilatação  $\delta$  e erosão  $\varepsilon$ , e para toda família  $(X_i)_{i \in I}$  em  $\mathfrak{P}$ ,

$$\delta\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \delta(X_i) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \in I} \varepsilon(X_i) \subset \varepsilon\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right).$$

As quatro classes de operadores elementares sobre  $\mathfrak{P}(E)$  podem ser caracterizadas pelas funções de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$ . Vamos, por enquanto, caracterizar apenas a classe das dilatações [Serra88, Proposition 2.1, p. 41]. Denotaremos o conjunto das funções de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$  por  $\mathfrak{P}^E$ .

**Proposição 3.5** (caracterização das dilatações) – O mapeamento de  $\Delta$  em  $\mathfrak{P}^E$ ,

$$\delta \mapsto a_\delta,$$

onde  $a_\delta$  é a função dada por

$$a_\delta(y) = \delta(\{y\}) \quad (y \in E)$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$a \mapsto \delta_a,$$

onde  $\delta_a$  é a dilatação dada por

$$\delta_a(Y) = \bigcup_{y \in Y} a(y) \quad (Y \in \mathfrak{P}).$$

□

**Prova** – Antes de tudo, temos que verificar que  $\delta_a$  é uma dilatação. Para todo  $a \in \mathfrak{P}^E$  e  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ ,

$$\delta_a(\sup \mathfrak{A}) = \bigcup_{y \in \sup \mathfrak{A}} a(y) \quad (\text{definição de } \delta_a)$$

$$= \bigcup_{y \in \bigcup_{Y \in \mathfrak{A}} Y} a(y) \quad (\text{propriedade da união})$$

$$= \bigcup_{Y \in \mathfrak{A}} \bigcup_{y \in Y} a(y) \quad (\text{associatividade e idempotência da união})$$

$$= \bigcup_{Y \in \mathfrak{A}} \delta_a(Y) \quad (\text{definição de } \delta_a)$$

$$= \sup \delta_a(\mathfrak{A}). \quad (\text{propriedade da união})$$

Vamos provar que  $\delta \mapsto a_\delta$  é uma bijeção. Em primeiro lugar, para todo  $\delta \in \Delta$  e  $Y \in \mathfrak{P}$ ,

$$\delta_{a_\delta}(Y) = \bigcup_{y \in Y} a_\delta(y) \quad (\text{definição de } \delta_a)$$

$$= \bigcup_{y \in Y} \delta(\{y\}) \quad (\text{definição de } a_\delta)$$

$$= \delta\left(\bigcup_{y \in Y} \{y\}\right) \quad (\text{propriedade de dilatação})$$

$$= \delta(Y), \quad (\text{representação de } Y \text{ por uma união de singletons})$$

em outros termos, para todo  $\delta \in \Delta$ ,  $\delta_{a_\delta} = \delta$ . Isto prova que o mapeamento  $\delta \mapsto a_\delta$  é injetor.

Em segundo lugar, para todo  $a \in \mathcal{P}^E$  e  $y \in E$ ,

$$a_{\delta_a}(y) = \delta_a(\{y\}) \quad (\text{definição de } a_\delta)$$

$$= \bigcup_{v \in \{y\}} a(v) \quad (\text{definição de } \delta_a)$$

$$= a(y), \quad (\text{definição de singleton})$$

em outros termos, para todo  $a \in \mathcal{P}^E$ ,  $a_{\delta_a} = a$ . Isto prova que o mapeamento  $\delta \mapsto a_\delta$  é sobrejetor e consequentemente é uma bijeção.  $\square$

A Proposição 3.5 mostra que existe uma correspondência um por um entre  $\Delta$  e  $\mathcal{P}^E$ . As funções  $a$  com valores nas partes de  $E$  caracterizam sem ambigüidade as dilatações. A Figura 3.2 ilustra este resultado. A função  $a_\delta$  é chamada de *função estruturante da dilatação*  $\delta$ .

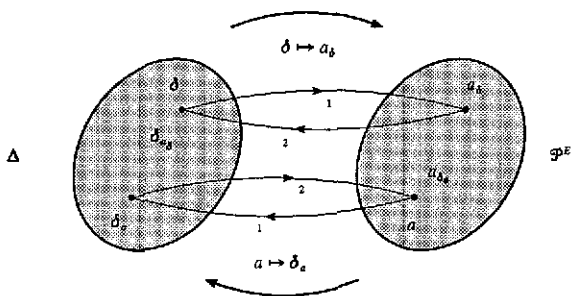


Fig. 3.2 – Bijeção entre as dilatações e as funções estruturantes.

A Figura 3.3 mostra quatro modos de representar uma dilatação por um bloquinho. Em (a) e (d) fazemos uma referência explícita à dilatação. Em (b) e (c) a dilatação é caracterizada pela sua função estruturante. Para um dado subconjunto  $X$ , o subconjunto  $\delta_a(X)$  chama-se *dilatação de  $X$  pela função estruturante  $a$* .

Podemos caracterizar de uma maneira análoga as erosões, anti-dilatações e anti-erosões por funções estruturantes. Nestes casos, para um dado subconjunto  $X$ , os subconjuntos  $\epsilon_a(X)$ ,  $\delta^a(X)$  e  $\epsilon^a(X)$  chamam-se, respectivamente, *erosão*, *anti-dilatação* e *anti-erosão de  $X$  pela função estruturante  $a$* . A caracterização das erosões será apresentada no próximo capítulo.

### 3.3 Operações sobre operadores

Os operadores podem ser combinados de duas maneiras muito úteis para produzir novos operadores. Uma primeira maneira, dita *paralela*, consiste em usar as operações de união e interseção entre subconjuntos.



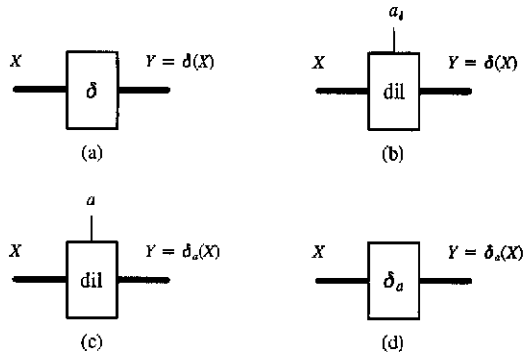


Fig. 3.3 – Quatro modos de representar uma dilatação.

**Definição 3.6** (união e interseção entre operadores) – Sejam  $\psi_1$  e  $\psi_2$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$

A *união dos operadores*  $\psi_1$  e  $\psi_2$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\psi_1 \vee \psi_2$  e dado por

$$(\psi_1 \vee \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cup \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A operação de *união entre dois operadores*, denotada  $\vee$ , é o mapeamento dado por

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \psi_1 \vee \psi_2.$$

A *interseção dos operadores*  $\psi_1$  e  $\psi_2$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\psi_1 \wedge \psi_2$  e dado por

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cap \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A operação de *interseção entre dois operadores*, denotada  $\wedge$ , é o mapeamento dado por

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \psi_1 \wedge \psi_2. \quad \square$$

A Figura 3.4 ilustra a construção da união e interseção de dois operadores, através de bloquinhos.

Seja  $\psi$  um operador sobre  $\mathcal{P}$ . O *complemento do operador*  $\psi$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\sim \psi$  e dado por

$$(\sim \psi)(X) = \sim \psi(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A operação de *complementação de um operador*, denotada  $\sim$ , é o mapeamento dado por

$$\psi \mapsto \sim \psi.$$

O conjunto  $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \vee, \wedge, \sim)$  dos operadores sobre  $\mathcal{P}$  provido das operações de união  $\vee$ , interseção  $\wedge$  e complementação  $\sim$  forma uma álgebra de Boole (por herança da álgebra de Boole dos subconjuntos).

As operações de união e interseção entre dois operadores estendem-se para famílias de operadores. Seja  $(\psi_i)$  uma família de operadores sobre  $\mathcal{P}$  com índices em  $I$ .

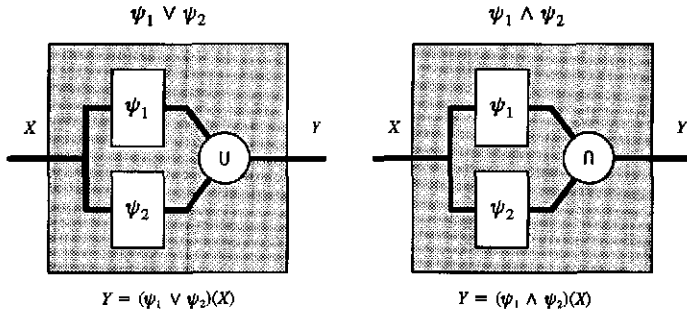


Fig. 3.4 – União e interseção de operadores.

A *união da família de operadores*  $\psi_i$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$  denotado  $\bigvee_{i \in I} \psi_i$  e definido por

$$\left(\bigvee_{i \in I} \psi_i\right)(X) = \bigcup_{i \in I} \psi_i(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

O mapeamento  $(\psi_i) \mapsto \bigvee_{i \in I} \psi_i$  é a operação de *união entre os elementos de uma família de operadores*.

Da mesma maneira, a *interseção da família de operadores*  $\psi_i$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$  denotado  $\bigwedge_{i \in I} \psi_i$  e definido por

$$\left(\bigwedge_{i \in I} \psi_i\right)(X) = \bigcap_{i \in I} \psi_i(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

O mapeamento  $(\psi_i) \mapsto \bigwedge_{i \in I} \psi_i$  é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de operadores*.

A comparação entre certos operadores se faz em termos de uma relação construída a partir da definição da relação  $\subset$  entre subconjuntos.

O operador  $\psi_1$  é *menor que* o operador  $\psi_2$ , denota-se  $\psi_1 \leq \psi_2$ , se e somente se, para todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,  $\psi_1(X) \subset \psi_2(X)$ , isto é,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Leftrightarrow (\psi_1(X) \subset \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{P})).$$

A relação  $\leq$  entre operadores é chamada de *relação “menor que”*. Esta relação é obtida por ordenação puntual.

Seja  $\iota$  o *operador identidade*, isto é,

$$\iota(X) = X \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Pela a definição da relação “menor que” entre operadores, um operador  $\psi$  é extensivo se e somente se  $\iota \leq \psi$  e anti-extensivo se e somente se  $\psi \leq \iota$ .

A relação  $\leq$  entre operadores é uma relação de ordem e o conjunto  $(\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}, \leq)$  dos operadores sobre  $\mathfrak{P}$  provido da relação  $\leq$  forma um conjunto parcialmente ordenado. Este conjunto provido das operações de união e interseção estendidas às famílias de operadores forma também um reticulado completo (por herança do reticulado dos subconjuntos, como aconteceu com as funções binárias). Em outros termos, para todo conjunto de índices  $I$ , estas operações verificam, para toda família  $(\psi_i)_{i \in I}$  de operadores sobre  $\mathfrak{P}$ ,

$$\bigvee_{i \in I} \psi_i = \sup \Psi_I \text{ e } \bigwedge_{i \in I} \psi_i = \inf \Psi_I,$$

onde  $\Psi_I$  é a imagem de  $I$  através a família  $(\psi_i)_{i \in I}$ , isto é,

$$\Psi_I = \{\psi \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}} : \exists i \in I, \psi_i = \psi\}.$$

O conjunto parcialmente ordenado  $(\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}, \leq)$  possui um maior elemento, que é  $X \mapsto E$ , e um menor elemento, que é  $X \mapsto \emptyset$ .

**Proposição 3.6** (sub-reticulados dos operadores extensivos e anti-extensivos) – O conjunto dos operadores extensivos (resp. anti-extensivos) é um *sub-reticulado completo* de  $(\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}, \leq)$ , isto é, a união e a interseção de qualquer família de operadores extensivos (resp. anti-extensivos) são operadores extensivos (resp. anti-extensivos).  $\square$

**Prova** – Seja  $(\psi_i)_{i \in I}$  uma família de operadores extensivos e seja  $\psi_k$  um operador desta família, então, para todo  $A \in \mathfrak{P}$ ,

$$A \subset \psi_k(A) \quad (\text{hipótese})$$

$$\subset \bigcup_{i \in I} \psi_i(A) \quad (\text{propriedade da união})$$

$$= \left( \bigvee_{i \in I} \psi_i \right)(A), \quad (\text{definição da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}})$$

isto é,  $\bigvee_{i \in I} \psi_i$  é extensivo.

Seja  $(\psi_i)_{i \in I}$  uma família de operadores extensivos. Para todo  $A \in \mathfrak{P}$  e  $i \in I$ ,

$$A \subset \psi_i(A). \quad (\text{hipótese})$$

Assim, para todo  $A \in \mathfrak{P}$ ,

$$A \subset \bigcap_{i \in I} \psi_i(A) \quad (\text{propriedade da interseção})$$

$$= \left( \bigwedge_{i \in I} \psi_i \right)(A), \quad (\text{definição da interseção em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}})$$

isto é,  $\bigwedge_{i \in I} \psi_i$  é extensivo.

A prova relativa a anti-extensividade é similar a da extensividade.  $\square$

Seja  $(\psi_i)_{i \in I}$  uma família de operadores extensivos, então para todo  $A \in \mathcal{P}$ ,

Em particular, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são dois operadores extensivos (resp. anti-extensivos) então  $\psi_1 \vee \psi_2$  e  $\psi_1 \wedge \psi_2$  são extensivos (resp. anti-extensivos).

**Proposição 3.7** (sub-reticulados dos operadores isotônicos e antitônicos) – O conjunto dos operadores isotônicos (resp. antitônicos) é um sub-reticulado completo de  $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$ , isto é, a união e a interseção de qualquer família de operadores isotônicos (resp. antitônicos) são operadores isotônicos (resp. antitônicos).  $\square$

**Prova** – Ver a prova em [Mather88, p. 122; HeiRon90, Proposition 2.2 (ii), p. 260].  $\square$

Em particular, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são dois operadores isotônicos (resp. antitônicos) então  $\psi_1 \vee \psi_2$  e  $\psi_1 \wedge \psi_2$  são isotônicos (resp. antitônicos).

O caso dos operadores elementares é mais complicado porque eles *não* formam sub-reticulados completos de  $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$ . Todavia, isto, longe de ser um inconveniente, dá uma chance para a decomposição dos operadores entre reticulados em termos de operadores elementares [BanBar93].

Vamos relembrar duas proposições importantes da teoria dos reticulados.

**Proposição 3.8** (condições suficientes para ter um reticulado completo) – Seja  $(\mathcal{L}, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado. Se, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$ , o supremo de  $\mathfrak{K}$  existir então  $(\mathcal{L}, \leq)$  é um reticulado completo e

$$\inf \mathfrak{K} = \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}, \text{ onde } \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} = \{Y \in \mathcal{L} : Y \text{ é l.i. de } \mathfrak{K}\}.$$

Se, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$ , o ínfimo de  $\mathfrak{K}$  existir então  $(\mathcal{L}, \leq)$  é um reticulado completo e

$$\sup \mathfrak{K} = \inf \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}, \text{ onde } \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} = \{Y \in \mathcal{L} : Y \text{ é l.s. de } \mathfrak{K}\}. \quad \square$$

**Prova** – Vamos provar no caso da existência de um supremo. Em primeiro lugar, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$  e todo  $A \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} A = \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} &\Rightarrow (\forall X \in \mathcal{L}, X \text{ é l.s. de } \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} \Rightarrow A \leq X) && \text{(propriedade do supremo)} \\ &\Rightarrow (\forall X \in \mathfrak{K}, X \text{ é l.s. de } \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} \Rightarrow A \leq X) && (\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}) \\ &\Rightarrow \forall X \in \mathfrak{K}, A \leq X && (X \text{ é l.i. de } \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} \text{ é verdade para todo } X \text{ em } \mathfrak{K}) \\ &\Leftrightarrow A \text{ é l.i. de } \mathfrak{K}. && \text{(definição de l.i.)} \end{aligned}$$

Isto é,  $\sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}$  é l.i. de  $\mathfrak{K}$ . Então, pela definição de limitante inferior e a transitividade de  $\leq$ , para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$  e  $A' \in \mathcal{L}$ , temos  $A' \leq \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} \Rightarrow A' \text{ é l.i. de } \mathfrak{K}$ .

Em segundo lugar, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$  e  $A' \in \mathcal{L}$ ,

$$\begin{aligned} A' \text{ é l.i. de } \mathfrak{K} &\Leftrightarrow A' \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}} && \text{(definição de } \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}) \\ &\Rightarrow A' \leq \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}. && \text{(propriedade do supremo)} \end{aligned}$$

Isto é, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$  e  $A' \in \mathcal{L}$ , temos  $A' \text{ é l.i. de } \mathfrak{K} \Rightarrow A' \leq \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}$ .

Assim, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$  e  $A' \in \mathcal{L}$ , temos  $A' \text{ é l.i. de } \mathfrak{K} \Leftrightarrow A' \leq \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}$ . Isto é, pela definição de ínfimo, para todo  $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$ , temos  $\inf \mathfrak{K} = \sup \mathfrak{J}_{\mathfrak{K}}$ . O que prova a existência do ínfimo a partir da existência do supremo.

No caso da existência de um ínfimo, a prova é similar [Birkho67, Theorem 3, p. 112].  $\square$

**Definição 3.7** (subconjunto sup-fechado e inf-fechado) – Um subconjunto  $\mathfrak{B}$  de um reticulado completo  $(\mathcal{L}, \leq)$  é *sup-fechado* se e somente se para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ , o supremo de  $\mathfrak{S}$  (em  $\mathcal{L}$ ),  $\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S}$ , pertence a  $\mathfrak{B}$ .

Ele é *inf-fechado* se e somente se para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ , o ínfimo de  $\mathfrak{S}$  (em  $\mathcal{L}$ ),  $\inf_{\mathcal{L}} \mathfrak{S}$ , pertence a  $\mathfrak{B}$ .  $\square$

Em outros termos, um subconjunto  $\mathfrak{B}$  de um reticulado completo  $(\mathcal{L}, \leq)$  é sup-fechado (resp. inf-fechado) se e somente se a operação de união (resp. interseção) estendida a famílias sobre  $(\mathcal{L}, \leq)$  é fechada em  $\mathfrak{B}$ .

A segunda parte da próxima proposição é o Teorema 6, p. 7 em [Birkho67].

**Proposição 3.9** (condição suficiente para um subconjunto de um reticulado completo ser um reticulado completo) – Seja  $(\mathcal{L}, \leq)$  um reticulado completo e seja  $\mathfrak{B}$  um subconjunto de  $\mathcal{L}$ . Se  $\mathfrak{B}$  é sup-fechado então, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ ,

$$\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} = \sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S},$$

e  $(\mathfrak{B}, \leq)$  é um reticulado completo.

Se  $\mathfrak{B}$  é inf-fechado então, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ ,

$$\inf_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} = \inf_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S},$$

e  $(\mathfrak{B}, \leq)$  é um reticulado completo.  $\square$

**Prova** – Vamos provar no caso do subconjunto  $\mathfrak{B}$  ser sup-fechado. De um lado, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$  e  $A' \in \mathfrak{B}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \in \mathfrak{B} \\ e \\ \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \leq A' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \text{ é l.s. de } \mathfrak{S} \text{ em } \mathfrak{B} \\ e \\ \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \leq A' \end{array} \right\} \quad \text{(propriedade do supremo)}$$

$$\Rightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathfrak{S} \text{ em } \mathfrak{B}. \quad \text{(transitividade)}$$

Isto é, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$  e  $A' \in \mathfrak{B}$ ,

$$(\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \in \mathfrak{B}) \Rightarrow (\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \leq A' \Rightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathfrak{S} \text{ em } \mathfrak{B}).$$

De outro lado, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$  e  $A' \in \mathfrak{B}$ ,

$$A' \text{ é l.s. de } \mathfrak{S} \text{ em } \mathfrak{B} \Rightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathfrak{S} \text{ em } \mathcal{L} \quad (\mathfrak{B} \subset \mathcal{L})$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \leq A'. \quad \text{(propriedade do supremo)}$$

Então necessariamente, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$  e  $A' \in \mathfrak{B}$ ,

$$(\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \in \mathfrak{B}) \Rightarrow (A' \text{ é l.s. de } \mathfrak{S} \text{ em } \mathfrak{B} \Rightarrow \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \leq A').$$

Em outros termos, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ ,

$$\begin{aligned}
 (\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{G} \in \mathfrak{B}) &\Leftrightarrow (\sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{G} \leq A' \Leftrightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathfrak{G} \text{ em } \mathfrak{B}), \\
 &\Leftrightarrow \sup_{\mathcal{L}} \mathfrak{G} = \sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}. \quad (\text{definição de supremo})
 \end{aligned}$$

Isto prova que se  $\mathfrak{B}$  é sup-fechado então o supremo de qualquer subconjunto de  $\mathfrak{B}$  existe, e, pela Proposição 3.8,  $\mathfrak{B}$  é um reticulado completo.

No caso do subconjunto  $\mathfrak{B}$  ser inf-fechado, a prova é similar. □

**Proposição 3.10** (propriedades dos operadores elementares) – O subconjunto  $\Delta$  das dilatações (resp.  $E$  das erosões,  $\Delta^a$  das anti-dilatações e  $E^a$  das anti-erosões) é um subconjunto sup-fechado (resp. inf-fechado, inf-fechado e sup-fechado) de  $\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}$ . □

**Prova** ([Serra88, p. 18; HeiRon90, Prop. 2.3]) – Vamos provar no caso do subconjunto  $\Delta$  das dilatações. Para todo  $\Psi \subset \Delta$  e  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 (\sup \Psi)(\sup \mathfrak{G}) &= \left( \bigvee_{\psi \in \Psi} \psi \right) (\sup \mathfrak{G}) && (\text{propriedade da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}) \\
 &= \bigcup_{\psi \in \Psi} \psi(\sup \mathfrak{G}) && (\text{definição da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}) \\
 &= \bigcup_{\psi \in \Psi} \sup \psi(\mathfrak{G}) && (\psi \text{ é dilatação}) \\
 &= \bigcup_{\psi \in \Psi} \bigcup_{x \in \mathfrak{G}} \psi(x) && (\text{propriedade da união em } \mathfrak{P}) \\
 &= \bigcup_{x \in \mathfrak{G}} \bigcup_{\psi \in \Psi} \psi(x) && (\text{comutatividades das uniões}) \\
 &= \bigcup_{x \in \mathfrak{G}} \left( \bigvee_{\psi \in \Psi} \psi \right) (x) && (\text{definição da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}) \\
 &= \bigcup_{x \in \mathfrak{G}} (\sup \Psi)(x) && (\text{propriedade da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}) \\
 &= \sup (\sup \Psi)(\mathfrak{G}). && (\text{propriedade da união em } \mathfrak{P})
 \end{aligned}$$

Isto prova que  $\sup \Psi \in \Delta$  e, consequentemente, que  $\Delta$  é sup-fechado.

No caso de  $E$ ,  $\Delta^a$  e  $E^a$ , a prova é similar. □

**Exercício 3.1** (propriedade das anti-dilatações) – Prove que as anti-dilatações formam um subconjunto inf-fechado de  $\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}$ . □

Pelas Proposições 3.9 e 3.10, o conjunto  $\Delta$  das dilatações (resp.  $E$  das erosões,  $\Delta^a$  das anti-dilatações e  $E^a$  das anti-erosões) provido da relação de ordem  $\leq$  é um *reticulado completo*. Em particular, no caso das dilatações, para todo  $\Psi \subset \Delta$ , temos

$$\sup_{\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}} \Psi = \sup_{\Delta} \Psi \quad \text{e} \quad \inf_{\Delta} \Psi \leq \inf_{\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}} \Psi.$$

Aplicando às funções de  $E$  em  $\mathcal{P}(E)$ , os mesmos mecanismos de construção usados para prover os operadores sobre  $\mathcal{P}$  das operações de união, interseção e complementação, e de uma relação de ordem consistente com a união e interseção, obtemos a álgebra de Boole  $(\mathcal{P}(E)^E, \vee, \wedge, -)$  e o reticulado completo  $(\mathcal{P}(E)^E, \leq)$ .

**Proposição 3.11** (isomorfismo de reticulados) – O reticulado  $\Delta$  das dilatações e o reticulado das funções de  $E$  em  $\mathcal{P}(E)$ , são isomorfos. Em outros termos,  $\delta \mapsto a_\delta$  é um isomorfismo de reticulado, isto é,  $\delta \mapsto a_\delta$  é uma bijeção e para todo  $\delta_1$  e  $\delta_2$  em  $\Delta$ ,

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Leftrightarrow a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}. \quad (\text{isotonia dupla})$$

□

**Prova** – Fazendo a hipótese que  $\delta_1 \leq \delta_2$ , para todo  $y \in E$ ,

$$\begin{aligned} a_{\delta_1}(y) &= \delta_1(\{y\}) && (\text{definição de } a_\delta) \\ &\subset \delta_2(\{y\}) && (\text{hipótese}) \\ &= a_{\delta_2}(y), && (\text{definição de } a_\delta) \end{aligned}$$

isto é,  $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}$ .

Fazendo a hipótese que  $a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}$ , para todo  $Y \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_1(Y) &= \bigcup_{y \in Y} a_{\delta_1}(y) && (\text{caracterização da dilatação}) \\ &\subset \bigcup_{y \in Y} a_{\delta_2}(y) && (\text{hipótese e propriedade da união}) \\ &= \delta_2(Y), && (\text{caracterização da dilatação}) \end{aligned}$$

isto é,  $a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2} \Rightarrow \delta_1 \leq \delta_2$ . □

**Proposição 3.12** (propriedade da união e interseção de dilatações) – Seja  $(\delta_i)_{i \in I}$  uma família de dilatações sobre  $\mathcal{P}$  e seja  $(a_i)_{i \in I}$  a família das respectivas funções estruturantes, isto é,  $a_i = a_{\delta_i}$  para todo  $i \in I$ . Então

$$\begin{aligned} \delta \bigvee_{i \in I} a_i &= \bigvee_{i \in I} \delta_i \\ \delta \bigwedge_{i \in I} a_i &\leq \bigwedge_{i \in I} \delta_i. \end{aligned} \quad \square$$

**Prova** – Em relação à união,

$$\begin{aligned} \delta \bigvee_{i \in I} a_i &= \delta_{\sup \mathcal{A}_I} && (\text{propriedade da união em } \mathcal{P}(E)^E) \\ &= \sup_{\Delta} \Delta_I && (\text{consequência da Proposição 3.11}) \end{aligned}$$

$$= \sup_{\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}} \Delta_I \quad (\text{Proposições 3.9 e 3.10})$$

$$= \bigvee_{i \in I} \delta_i. \quad (\text{propriedade da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}})$$

Em relação à interseção,

$$\delta \bigwedge_{i \in I} a_i = \delta_{\text{in} \mathcal{L}_I} \quad (\text{propriedade da interseção em } \mathfrak{P}(E)^E)$$

$$= \inf_{\Delta} \Delta_I \quad (\text{consequência da Proposição 3.11})$$

$$\leq \inf_{\mathfrak{P}^{\mathfrak{P}}} \Delta_I \quad (\Delta \subset \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}})$$

$$= \bigwedge_{i \in I} \delta_i. \quad (\text{propriedade da interseção em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}})$$

□

Em particular, a união de duas dilatações coincide com a dilatação que tem como função estruturante a união das funções estruturantes. A interseção de duas dilatações é maior que a dilatação que tem como função estruturante a interseção das funções estruturantes. Em outros termos,

$$\delta_{a_1 \vee a_2} = \delta_1 \vee \delta_2 \quad \text{e} \quad \delta_{a_1 \wedge a_2} \leq \delta_1 \wedge \delta_2.$$

A Proposição 3.12 indica um caminho para a decomposição de uma dilatação  $\delta$  em termo de uma união de dilatações menores. Seja  $(E_i)_{i \in I}$  uma *partição* de  $E$ , isto é,  $(E_i)_{i \in I}$  é uma coleção de subconjuntos de  $E$  tais que  $E = \bigcup_{i \in I} E_i$  e  $E_i \cap E_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ . Seja  $(a_i)_{i \in I}$  a família de funções de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$  dada por

$$a_i(y) = \begin{cases} a_{\delta}(y) & \text{se } y \in E_i \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases} \quad (y \in E)$$

Por construção  $a_{\delta} = \bigvee_{i \in I} a_i$ . Então, pela Proposição 3.12,  $\delta = \bigvee_{i \in I} \delta_{a_i}$ .

Sejam  $a_1$  e  $a_2$  as funções de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$  mapeando os pontos  $x_1$  e  $x_2$  de  $E$  (pontos marcados com bolinhas pretas) nos subconjuntos da Figura 3.5 (pontos nas áreas cinzas). A Figura 3.6 mostra os subconjuntos mapeados por  $a_1 \vee a_2$  e  $a_1 \wedge a_2$  nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ . A Figura 3.7 mostra os subconjuntos transformados do subconjunto  $\{x_1, x_2\}$  pelas dilatações  $\delta_{a_1 \vee a_2}$  e  $\delta_{a_1 \wedge a_2}$ . Conforme a teoria estes subconjuntos são iguais. A Figura 3.8 mostra os subconjuntos transformados do subconjunto  $\{x_1, x_2\}$  pelas dilatações  $\delta_{a_1}$  e  $\delta_{a_2}$  e  $\delta_{a_1 \wedge a_2}$ . Conforme a teoria estes subconjuntos podem não ser iguais.

Uma segunda maneira de combinar operadores, dita *sequencial* ou *serial*, consiste em ligar a saída de um operador com a entrada do outro.



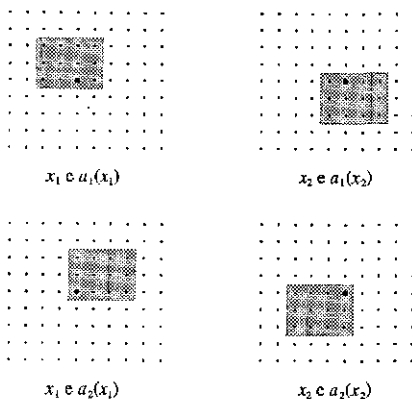


Fig. 3.5 – Especificação das funções estruturantes.

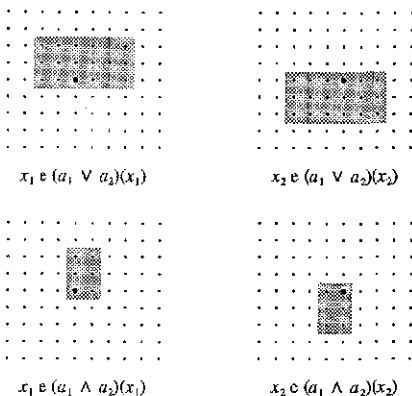


Fig. 3.6 – União e interseção das funções estruturantes.

**Definição 3.8** (composição de operadores) – Sejam  $\psi_1$  e  $\psi_2$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . O *composto* (ou *produto*) do operador  $\psi_1$  pelo operador  $\psi_2$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\psi_1\psi_2$  e dado por

$$(\psi_1\psi_2)(X) = \psi_1(\psi_2(X)) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A *composição de um operador por um outro* é o mapeamento dado por

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \psi_1\psi_2.$$

□

A Figura 3.9 ilustra a composição de um operador por um outro, através de bloquinhos.

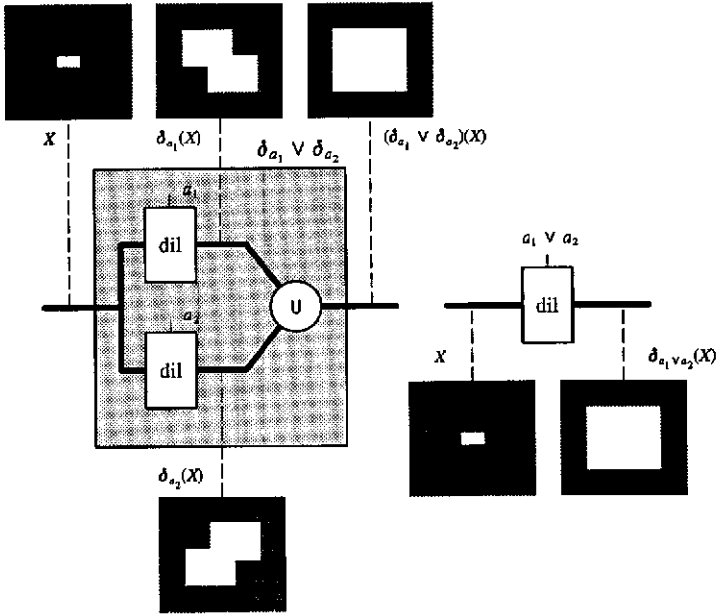


Fig. 3.7 – União de dilatações.

Pela Definição 3.3, um operador  $\psi$  é idempotente de tipo 1 se e somente se

$$\psi\psi = \psi,$$

e é idempotente de tipo 2 se e somente se

$$\psi\psi = \epsilon.$$

**Exercício 3.2** (associatividade da composição) – Mostre que a composição é associativa, isto é, para todo operador  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e  $\psi_3$  sobre  $\mathcal{P}$ ,

$$\psi_1(\psi_2\psi_3) = (\psi_1\psi_2)\psi_3. \quad \square$$

**Proposição 3.13** (propriedades do composto) – Sejam  $\psi_1$  e  $\psi_2$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . O operador  $\psi_1\psi_2$ , composto do operador  $\psi_1$  pelo operador  $\psi_2$  tem as propriedades dadas nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. □

Tabela 3.1 – EXTENSIVIDADE/ANTI-EXTENSIVIDADE DO COMPOSTO.

	$\psi_2$ é extensivo	$\psi_2$ é anti-ext.
$\psi_1$ é extensivo	$\psi_1\psi_2$ é extensivo	–
$\psi_1$ é anti-ext.	–	$\psi_1\psi_2$ é anti-ext.

Tabela 3.2 – ISOTONIA/ANTONIA DO COMPOSTO.

	$\psi_2$ é isotone	$\psi_2$ é antitone
$\psi_1$ é isotone	$\psi_1\psi_2$ é isotone	$\psi_1\psi_2$ é antitone
$\psi_1$ é antitone	$\psi_1\psi_2$ é antitone	$\psi_1\psi_2$ é isotone

Tabela 3.3 – CLASSE DO COMPOSTO.

	$\psi_2$ é dilatação	$\psi_2$ é erosão	$\psi_2$ é anti-dilatação	$\psi_2$ é anti-erosão
$\psi_1$ é dilatação	$\psi_1\psi_2$ é dilatação	–	–	$\psi_1\psi_2$ é anti-eros.
$\psi_1$ é erosão	–	$\psi_1\psi_2$ é erosão	$\psi_1\psi_2$ é anti-dil.	–
$\psi_1$ é anti-dilatação	$\psi_1\psi_2$ é anti-dil.	–	–	$\psi_1\psi_2$ é erosão
$\psi_1$ é anti-erosão	–	$\psi_1\psi_2$ é anti-eros.	$\psi_1\psi_2$ é dilatação	–

**Exercício 3.3** (propriedades da composição) – Prove que o composto de uma anti-dilatação por uma anti-erosão é uma erosão.  $\square$

Finalmente, as maneiras paralela e sequencial de combinar os operadores podem ser combinadas.

**Proposição 3.14** (união e interseção versus composição) – Para todo operador  $\phi$  sobre  $\mathcal{P}$  e toda família  $(\psi_i)_{i \in I}$  de operadores sobre  $\mathcal{P}$ ,

$$\left( \bigvee_{i \in I} \psi_i \right) \phi = \bigvee_{i \in I} \psi_i \phi \quad \text{e} \quad \left( \bigwedge_{i \in I} \psi_i \right) \phi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i \phi;$$

se  $\phi$  é uma dilatação,

$$\phi \left( \bigvee_{i \in I} \psi_i \right) = \bigvee_{i \in I} \phi \psi_i;$$

se  $\phi$  é uma erosão,

$$\phi \left( \bigwedge_{i \in I} \psi_i \right) = \bigwedge_{i \in I} \phi \psi_i;$$

se  $\phi$  é uma anti-dilatação,

$$\phi(\bigvee_{i \in I} \psi_i) = \bigwedge_{i \in I} \phi\psi_i$$

se  $\phi$  é uma anti-erosão,

$$\phi(\bigwedge_{i \in I} \psi_i) = \bigvee_{i \in I} \phi\psi_i$$

□

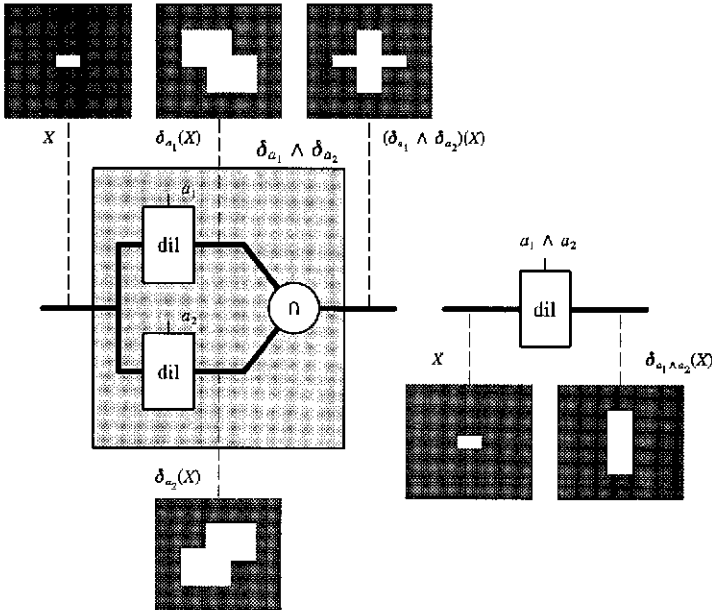


Fig. 3.8 – Interseção de dilatações.

**Prova** – Para todo operador  $\phi$  sobre  $\mathcal{P}$ , toda família  $(\psi_i)_{i \in I}$  de operadores sobre  $\mathcal{P}$ , e  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$((\bigvee_{i \in I} \psi_i)\phi)(X) = (\bigvee_{i \in I} \psi_i)(\phi(X)) \quad (\text{definição da composição})$$

$$= \bigcup_{i \in I} \psi_i(\phi(X)) \quad (\text{definição da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}})$$

$$= \bigcup_{i \in I} (\psi \phi)(X) \quad (\text{definição da composição})$$

$$= (\bigvee_{i \in I} \psi \phi)(X). \quad (\text{definição da união em } \mathfrak{P}^{\mathfrak{P}})$$

A prova relativa à interseção é similar a relativa à união. As outras igualdades são consequência direta das definições dos operadores elementares.  $\square$

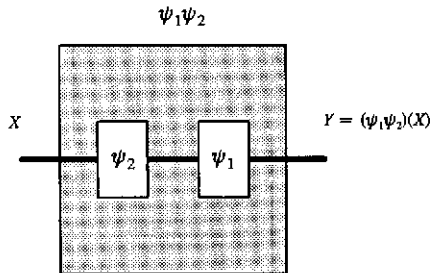


Fig. 3.9 – Composição de operadores.

**Proposição 3.15** (relação de ordem versus composição) – Para todo operador  $\phi$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sobre  $\mathfrak{P}$ ,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Rightarrow \psi_1 \phi \leq \psi_2 \phi;$$

se  $\phi$  é isotônico,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Rightarrow \phi \psi_1 \leq \phi \psi_2;$$

se  $\phi$  é antitônico,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Rightarrow \phi \psi_2 \leq \phi \psi_1. \quad \square$$

**Exercício 3.4** (relação de ordem versus composição) – Prove a primeira e segunda implicação do enunciado da Proposição 3.15.  $\square$

Observamos que a composição de dois operadores elementares pode *não* ser comutativa. Por exemplo, sejam  $x$  e  $y$  dois pontos de  $E$  e sejam  $a_1$  e  $a_2$  duas funções tomando os seguintes valores em  $x$  e  $y$ :  $a_1(x) = \{x\}$ ,  $a_1(y) = \{x\}$  e  $a_2(x) = \{y\}$ . Então,  $\delta_{a_2} \delta_{a_1}(\{x\}) = \{y\}$  e  $\delta_{a_1} \delta_{a_2}(\{x\}) = \{x\}$ . Isto é, neste caso,  $\delta_{a_2} \delta_{a_1} \neq \delta_{a_1} \delta_{a_2}$ .



## Capítulo 4

# Operadores invariantes por translação

As funções estruturantes do capítulo anterior podem ser vistas como uma maneira de definir uma noção de vizinhança para os pontos do conjunto  $E$ . Por exemplo, seja  $a$  uma função estruturante definida sobre  $E$ . O conjunto  $a(x)$  pode ser visto como a vizinhança do ponto  $x$ . Neste capítulo, vamos *estruturar* o conjunto  $E$  de maneira a podermos definir uma certa *regularidade* entre vizinhanças de pontos distintos. A estrutura considerada é a de grupo Abelian.

Com esta estrutura é possível definir os operadores de translação e transposição e, finalmente, a classe dos *operadores invariantes por translação*. Esta classe foi a primeira estudada em Morfologia Matemática, e possui muitas propriedades matemáticas interessantes.

Neste capítulo, damos uma atenção especial a situação real onde o domínio das imagens é finito. Para tanto, será introduzida a noção de adição módulo  $n$ . A fim de estruturarmos o domínio das imagens segundo um grupo Abelian com a liberdade de escolha do elemento neutro, usaremos a noção de espaço afim ligado a um grupo Abelian.

As operações de adição e subtração de Minkowski são apresentadas e utilizadas explicitamente na caracterização das dilatações invariantes por translação.

Em certas aplicações, os operadores elementares invariantes por translação podem apresentar efeitos de bordas indesejáveis, por isso introduzimos também a classe dos operadores *condicionalmente invariantes por translação*.

### 4.1 Translações e transposição

Seja  $\mathbf{Z}$  o conjunto dos inteiros. Seja  $\mathbf{Z}^2$  o produto Cartesiano  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ , isto é, o conjunto dos pares ordenados de inteiros. A maneira mais simples de definirmos a noção de vizinhança é considerar o conjunto  $E$  como sendo a imagem de um *retângulo* de  $\mathbf{Z}^2$  através de um mapeamento bijetor.

Sejam  $n_1$  e  $n_2$  dois inteiros positivos, representando o tamanho do retângulo. A Figura 4.1 mostra dois conjuntos  $E$  ou, nos referindo às imagens, duas grades particulares. Em (a), temos um exemplo de uma grade *quadrada* com  $(n_1, n_2) = (6, 6)$  e, em (b), de uma grade *hexagonal* com  $(n_1, n_2) = (12, 4)$  ou  $(n_1, n_2) = (6, 8)$ . Neste caso, dizemos que o conjunto ou grade  $E$  tem o tamanho  $n_1 \times n_2$ .

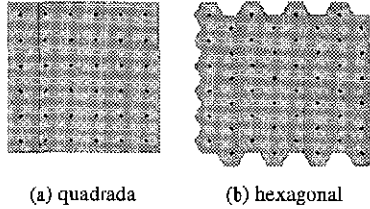


Fig. 4.1 – Dois tipos de grade.

Queremos estruturar o conjunto  $E$  segundo um grupo Abelian, provendo  $E$  de uma adição cujo elemento neutro seja um ponto arbitrário de  $E$ . Para isto, vamos partir inicialmente do retângulo  $\text{Ret}(n_1, n_2) = [0, \dots, n_1 - 1] \times [0, \dots, n_2 - 1]$  e o prover de uma adição.

O conjunto  $\mathbf{Z}$  provido da adição entre números inteiros forma um *grupo Abelian*, denotado  $(\mathbf{Z}, +)$ . Em outros termos, a adição verifica os axiomas abaixo [CaRaCo63].

Para todo elemento  $a, b$  e  $c$  em  $\mathbf{Z}$ .

- (1)  $a + b = b + a$  (comutatividade)
- (2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (associatividade)
- (3)  $\exists e \in \mathbf{Z}, a + e = e + a = a$  (lei do elemento neutro)
- (4)  $\exists a' \in \mathbf{Z}, a + a' = a' + a = e$ . (lei do oposto)

O elemento  $e$ , chamado de *elemento neutro*, é o elemento 0 de  $\mathbf{Z}$ . O elemento  $a'$ , *oposto de  $a$* , é denotado  $-a$ .

Os três últimos axiomas definem um *grupo*. Isto é, um grupo Abelian é um grupo comutativo.

**Exercício 4.1** (unicidade do elemento neutro) – Prove que o elemento neutro é único. □

**Prova** – Sejam  $e_1$  e  $e_2$  dois elemento neutros,

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1 + e_2 && (e_2 \text{ é elemento neutro}) \\ &= e_2. && (e_1 \text{ é elemento neutro}) \end{aligned}$$

□

**Exercício 4.2** (unicidade do oposto) – Usando os axiomas de grupo, prove que o oposto é único. □

**Prova** – Sejam  $a_1$  e  $a_2$  dois opostos de  $a$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + e && (\text{lei do elemento neutro}) \\ &= a_1 + (a + a_2) && (a_2 \text{ é oposto de } a) \\ &= (a_1 + a) + a_2 && (\text{associatividade}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= e + a_2 && (a_1 \text{ é oposto de } a) \\
 &= a_2. && (\text{lei do elemento neutro}) \quad \square
 \end{aligned}$$

A diferença entre os inteiros  $a$  e  $b$  é o elemento de  $\mathbf{Z}$ , denotado  $a - b$  e dado por

$$a - b = a + (-b).$$

A adição entre inteiros estende-se a pares ordenados de inteiros. Sejam  $(a_1, a_2)$  e  $(b_1, b_2)$  dois pares ordenados de inteiros. O conjunto  $\mathbf{Z}^2$  provido da adição definida por

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

é um grupo Abeliano. O elemento neutro é o par  $(0, 0)$ , o oposto de  $(a_1, a_2)$  é  $(-a_1, -a_2)$ , que é denotado  $\bar{\sim} (a_1, a_2)$ .

Para provar o retângulo  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$  de uma adição que verifique os axiomas de um grupo Abeliano, precisamos introduzir a noção de adição módulo  $n$ .

**Definição 4.1** (adição módulo  $n$ ) – Seja  $n$  um inteiro positivo. Seja  $\mathbf{Int}(n) = [0, \dots, n - 1]$  um intervalo de  $\mathbf{Z}$  de tamanho  $n$ . A soma módulo  $n$  dos elementos  $a$  e  $b$  em  $\mathbf{Int}(n)$  é o elemento de  $\mathbf{Int}(n)$  denotado  $a +_n b$  e dado por

$$a +_n b = \begin{cases} a + b & \text{se } a + b \leq n - 1 \\ a + b - n & \text{c.c.} \end{cases}$$

ou ainda,

$$a +_n b = \text{resto}((a + b)/n).$$

A adição módulo  $n$  em  $\mathbf{Int}(n)$ , denotada  $+_n$ , é o mapeamento dado por

$$(a, b) \mapsto a +_n b. \quad \square$$

Denotaremos a soma módulo  $n$  de  $a$  e  $b$  simplesmente  $a + b$ , quando não houver dúvida sobre o tamanho do intervalo.

O elemento neutro da adição módulo  $n$  em  $\mathbf{Int}(n)$  é 0. O oposto módulo  $n$  de  $a$  é denotado  $-_n a$  e dado por

$$-_n a = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ n - a & \text{c.c.} \end{cases}$$

O intervalo  $\mathbf{Int}(n)$  provido da adição módulo  $n$  forma um grupo Abeliano.

**Exercício 4.3** (lei do oposto) – Seja  $a$  um elemento do intervalo  $\mathbf{Int}(n)$ . Prove que o elemento  $-_n a$  definido acima é o oposto módulo  $n$  de  $a$ . □

Usando o mesmo mecanismo de extensão da adição de  $\mathbf{Z}$  para  $\mathbf{Z}^2$ , a adição módulo  $n$  em  $\mathbf{Int}(n)$  estende-se aos pares em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Sejam  $(a_1, a_2)$  e  $(b_1, b_2)$  dois pares em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ , o conjunto  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$  provido da *adição módulo*  $(n_1, n_2)$ , denotada  $+$  <sub>$(n_1, n_2)$</sub>  e definida por

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1, a_2) +_{(n_1, n_2)} (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

forma um grupo Abelian. O elemento neutro é o par  $(0, 0)$ , o oposto módulo  $(n_1, n_2)$  de  $(a_1, a_2)$  é  $(-a_1, -a_2)$ , que é denotado  $-$  <sub>$(n_1, n_2)$</sub>  $(a_1, a_2)$ .

A diferença entre os pares  $a$  e  $b$  em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$  é o par de  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ , denotado  $a -$  <sub>$(n_1, n_2)$</sub>  $b$  e dado por

$$a -_{(n_1, n_2)} b = a +_{(n_1, n_2)} (-b).$$

Denotaremos a soma módulo  $(n_1, n_2)$  de  $a$  e  $b$  em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$  simplesmente  $a + b$ , quando não houver dúvida sobre o tamanho do retângulo. Neste caso, denotaremos o oposto módulo  $(n_1, n_2)$  de  $a$  simplesmente,  $-a$  e a diferença módulo  $(n_1, n_2)$  de  $a$  e  $b$  por  $a - b$ .

Vamos considerar dois exemplos práticos de conjunto  $E$  formando um *espaço afim ligado ao grupo Abelian*  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Os elementos de  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$  serão chamados, por abuso de linguagem, de vetores (apesar de não serem elementos de um espaço vetorial) e os elementos de  $E$  serão chamados de pontos. Para ajudar a fazer a diferença entre vetores e pontos, os vetores serão sobrelinhados por uma seta quando for conveniente.

O primeiro conjunto  $E$  considerado é o intervalo  $\mathbf{Int}(n)$ . Na prática, este conjunto poderia ser os endereços de  $n$  pixels armazenados na memória de um computador.

**Proposição 4.1** (intervalo como espaço afim ligado ao retângulo) – Seja  $n = n_1 n_2$ . O conjunto  $\mathbf{Int}(n)$  provido do mapeamento de  $\mathbf{Int}(n) \times \mathbf{Int}(n)$  em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ :  $(x, y) \mapsto \vec{xy}$ , definido por

$$\vec{xy} = (\text{int}(\frac{y}{n_2}) - \text{int}(\frac{x}{n_2}), \text{resto}(\frac{y}{n_2}) - \text{resto}(\frac{x}{n_2})),$$

é um *espaço afim ligado ao grupo Abelian*  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ , isto é, o mapeamento  $(x, y) \mapsto \vec{xy}$  satisfaz aos três axiomas abaixo

- (1) para todo  $x$  em  $\mathbf{Int}(n)$  e  $\vec{u}$  em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ ,  $\exists y \in E$ ,  $\vec{xy} = \vec{u}$
- (2)  $\vec{xy} = (0, 0) \Rightarrow x = y$
- (3) para todo  $x, y$  e  $z$  em  $\mathbf{Int}(n)$ ,  $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$ . (relação de Chasles)

□

**Prova** – O resultado enunciado decorre da definição de  $\vec{xy}$ . □

Pela relação de Chasles, o oposto de  $\vec{xy}$  é  $\vec{yx}$ , isto é,  $-\vec{xy} = \vec{yx}$ .

O elemento  $y$  do primeiro axioma da Proposição 4.1 é único [CaRaCo65, p. 88]. Isto permite definir uma operação externa sobre  $\mathbf{Int}(n)$ .

**Definição 4.2** (soma de um ponto por um vetor) – Seja  $E$  um espaço afim ligado a  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ . Sejam  $x$  um ponto em  $E$  e  $\vec{u}$  um vetor em  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ . A soma de um ponto  $x$  por um vetor  $\vec{u}$  é o ponto de  $E$ , denotado  $x + \vec{u}$  (ou simplesmente  $x + \vec{u}$ , quando não houver dúvida sobre o espaço afim considerado) e dado por

$$y = x + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{xy} = \vec{u}. \quad \square$$

Assim, para todo  $x$  e  $y$  em  $E$ ,  $y = x + \vec{xy}$ .

Para um dado ponto  $o$  em  $E$ , o mapeamento  $x \mapsto \vec{ox}$  é uma bijeção de  $E$  em  $\text{Ret}(n_1, n_2)$  e sua inversa é o mapeamento  $\vec{u} \mapsto o + \vec{u}$ .

**Proposição 4.2** (propriedades da soma de um ponto por um vetor) – Para todo ponto  $x$  em  $E$ ,

(1)  $x + (0, 0) = x$

(2) para todo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ ,  $x + (\vec{u} + \vec{v}) = (x + \vec{u}) + \vec{v}$ . □

**Prova** – A propriedade (1) decorre do segundo axioma da Proposição 4.1. A propriedade (2) decorre do axioma (3) de espaço afim: para todo  $x$  em  $E$  e todo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ ,

$$\begin{aligned} z = x + (\vec{u} + \vec{v}) &\Leftrightarrow \vec{xz} = \vec{u} + \vec{v} && \text{(Definição 4.2)} \\ &\Leftrightarrow \vec{xz} = \vec{u} + \vec{v} \quad \text{e} \quad y = x + \vec{u} && \text{(equivalência lógica)} \\ &\Leftrightarrow \vec{xy} + \vec{yz} = \vec{u} + \vec{v} \quad \text{e} \quad y = x + \vec{u} && \text{(relação de Chasles)} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{yz} = \vec{u} + \vec{v} \quad \text{e} \quad y = x + \vec{u} && \text{(Definição 4.2)} \\ &\Leftrightarrow \vec{yz} = \vec{v} \quad \text{e} \quad y = x + \vec{u} && \text{(propriedade da soma)} \\ &\Leftrightarrow z = y + \vec{v} \quad \text{e} \quad y = x + \vec{u} && \text{(Definição 4.2)} \\ &\Leftrightarrow z = (x + \vec{u}) + \vec{v}. && \text{(equivalência lógica)} \end{aligned} \quad \square$$

Seja  $x$  um ponto em  $\text{Int}(n)$  e seja  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  um vetor de  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ , pelas definições de  $\vec{xy}$  e de soma de um ponto por um vetor,

$$x + \vec{u} = n_2 \left( u_1 + \text{int} \left( \frac{x}{n_2} \right) \right) + u_2 + \text{resto} \left( \frac{x}{n_2} \right).$$

Por exemplo, se  $n_1 = n_2 = 3$ ,  $x = 6$  e  $\vec{u} = (2, 2)$ , então

$$6 + (2, 2) = 3 \left( 2 + 2 \right) + 2 + 0 = 3(1) + 2 = 5.$$

Por outro lado, verificamos que

$$\vec{65} = \left( 1 - 2, 2 - 0 \right) = (2, 2).$$

O segundo conjunto  $E$  considerado é o próprio retângulo  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ . Na prática, este conjunto poderia ser as coordenadas dos pixels dispostos numa grade quadrada.

**Proposição 4.3** (retângulo como espaço afim canônico) – O conjunto  $\text{Ret}(n_1, n_2)$  provido do mapeamento de  $\text{Ret}(n_1, n_2) \times \text{Ret}(n_1, n_2)$  em  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ :  $(x, y) \mapsto \vec{xy}$ , definido por

$$\vec{xy} = y - \begin{matrix} (n_1, n_2) \\ x \end{matrix}$$

é um *espaço afim canônico* (ligado a ele próprio). □

**Prova** – O resultado enunciado decorre da definição de  $\vec{xy}$ . □

Seja  $x$  um ponto em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$  e seja  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  um vetor de  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ , pelas definições de  $\vec{xy}$  e de soma de um ponto por um vetor,

$$x \underset{\mathbf{Ret}(n_1, n_2)}{+} \vec{u} = x \underset{(n_1, n_2)}{+} u.$$

Por exemplo, se  $n_1 = n_2 = 3$ ,  $x = (2, 0)$  e  $\vec{u} = (2, 2)$ , então

$$(2, 0) + (2, 2) = (2, 0) \underset{(3, 3)}{+} (2, 2) = (1, 2).$$

Por outro lado, verificamos que

$$(2, 0) \overset{\vec{}}{(1, 2)} = (1 - \underset{3}{2}, \underset{3}{2} - 0) = (2, 2).$$

Seja  $E$  um espaço afim ligado a  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Podemos estruturar  $E$  para ser um grupo Abelianico cujo elemento neutro seja um ponto qualquer que chamaremos de *origem* e denotaremos  $o$ .

**Definição 4.3** (adição num espaço afim ligado ao retângulo) – Seja  $E$  um espaço afim ligado a  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Seja  $o$  um ponto qualquer de  $E$  e sejam  $a$  e  $b$  dois pontos de  $E$ . A *soma, relativa à origem  $o$ , dos pontos  $a$  e  $b$  em  $E$*  é o ponto de  $E$ , denotado  $a \underset{E}{\overset{o}{+}} b$  (ou simplesmente  $a + b$ , quando não houver dúvida sobre o ponto origem e o espaço afim considerado) e dado por

$$a \underset{E}{\overset{o}{+}} b = o + (\overset{o}{\vec{a}} \underset{(n_1, n_2)}{+} \overset{o}{\vec{b}}).$$

A *adição, relativa à origem  $o$ , de dois pontos de  $E$* , denotada  $\underset{E}{\overset{o}{+}}$ , é o mapeamento dado por

$$(a, b) \mapsto a \underset{E}{\overset{o}{+}} b. \quad \square$$

A Figura 4.2 mostra a construção da soma, relativa à origem  $o$ , de dois pontos  $a$  e  $b$  em  $E$ .

**Proposição 4.4** (grupo Abelianico sobre um espaço afim ligado ao retângulo) – Seja  $E$  um espaço afim ligado a  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Seja  $o$  um ponto qualquer de  $E$ . O conjunto  $E$  provido da adição  $\underset{E}{\overset{o}{+}}$  relativa à origem  $o$  é um grupo Abelianico. O elemento neutro é o ponto  $o$ . O oposto de um ponto  $a$ , relativo à origem  $o$ , denotado  $\underset{E}{\overset{o}{-}} a$ , é dado por

$$\underset{E}{\overset{o}{-}} a = o + \overset{o}{\vec{a}}. \quad \square$$

**Prova** – Para um dado ponto  $o$  e para todo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ ,

$$(o + \vec{u}) \underset{E}{\overset{o}{+}} (o + \vec{v}) = o + (\vec{u} \underset{(n_1, n_2)}{+} \vec{v}).$$

Isto prova que a bijeção  $\vec{u} \mapsto o + \vec{u}$  é um isomorfismo de  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ , provido da adição  $\underset{(n_1, n_2)}{+}$  em  $E$ , provido da operação  $\underset{E}{\overset{o}{+}}$ . Já que  $(\mathbf{Ret}(n_1, n_2), \underset{(n_1, n_2)}{+})$  é um grupo Abelianico, o mesmo ocorre com  $(E, \underset{E}{\overset{o}{+}})$ . Pela

propriedade (1) da Proposição 4.2, o elemento neutro de  $E$  é  $o + (0, 0) = o$ . O oposto de  $a$  em  $E$  é  $o + (-\vec{o}\vec{a}) = o + \vec{o}\vec{a}$ .  $\square$

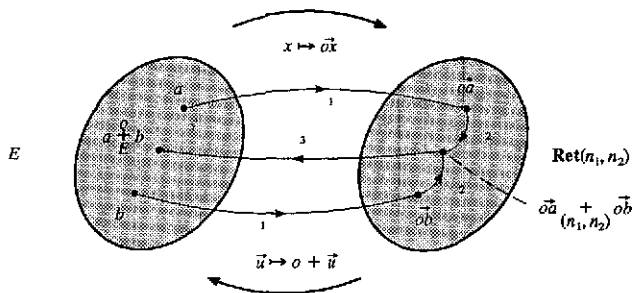


Fig. 4.2 – Construção da soma num espaço afim.

Seja  $(E, \frac{o}{E})$  o grupo Abelian da Proposição 4.4, a diferença, relativa à origem  $o$ , entre os pontos  $a$  e  $b$  em  $E$  é o elemento de  $E$ , denotado  $a \frac{o}{E} b$  e dado por

$$a \frac{o}{E} b = a \frac{o}{E} ( \frac{o}{E} b ).$$

Daqui em diante, o conjunto  $E$  será o próprio retângulo  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Quando a origem  $o$  é o par  $(0, 0)$ , a adição  $\frac{o}{E}$  reduz-se a adição módulo  $(n_1, n_2)$ .

A Figura 4.3 mostra a soma  $a \frac{o}{\mathbf{Ret}(9, 10)} b$ , relativa ao ponto origem  $o$  (representado por um pequeno quadrado preto), de dois pontos  $a$  e  $b$  de  $\mathbf{Ret}(9, 10)$  e o oposto  $\frac{o}{\mathbf{Ret}(9, 10)} a$ , relativo à  $o$ , do ponto  $a$ . A soma e o oposto podem ser obtidos graficamente duplicando 8 vezes o retângulo  $\mathbf{Ret}(9, 10)$  em torno dele mesmo e considerando a soma e o oposto, relativo a  $o$ , sobre o espaço afim canônico  $\mathbf{Z}^2$ , provido do mapeamento definido por  $\vec{x}\vec{y} = y - x$ . A soma  $a \frac{o}{\mathbf{Z}^2} b$  é obtida pela regra do paralelograma. Esta regra é baseada no seguinte resultado,

$$a \frac{o}{\mathbf{Z}^2} b = o \frac{o}{\mathbf{Z}^2} (\vec{o}\vec{a} + \vec{o}\vec{b}) \quad (\text{definição de adição relativa à } o)$$

$$= (o \frac{o}{\mathbf{Z}^2} \vec{o}\vec{a}) \frac{o}{\mathbf{Z}^2} \vec{o}\vec{b} \quad (\text{Proposição 4.2})$$

$$= a \frac{o}{\mathbf{Z}^2} \vec{o}\vec{b}. \quad (\text{Definição 4.2})$$

A soma  $a \underset{\text{Ret}(9,10)}{+} b$  é obtida a partir da soma em  $\mathbb{Z}^2$ , levando à coincidência com  $\text{Ret}(9,10)$ , o retângulo que contém esta soma. O oposto  $\underset{\text{Ret}(9,10)}{-} a$  é obtido a partir do oposto em  $\mathbb{Z}^2$ , levando à coincidência com  $\text{Ret}(9,10)$ , o retângulo que contém este oposto.

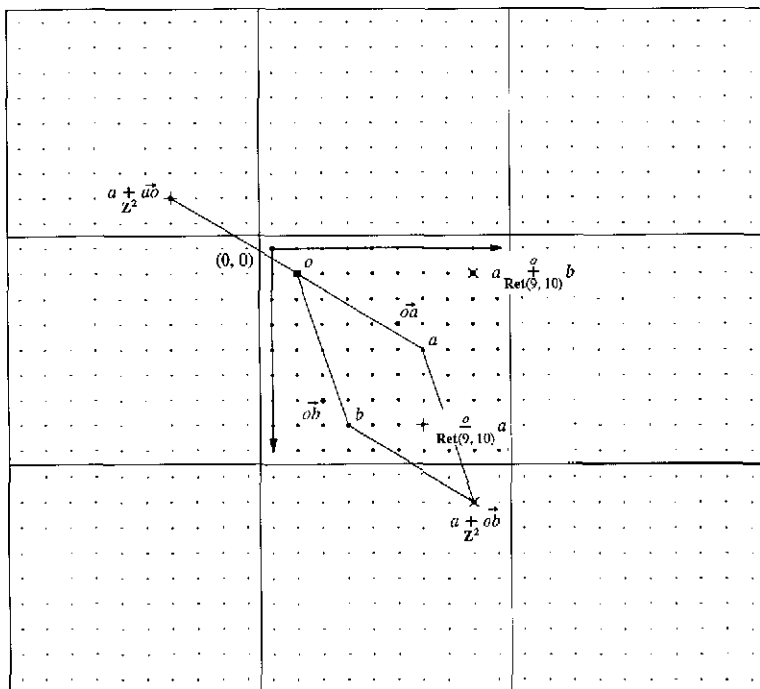


Fig. 4.3 – Soma e oposto num espaço afim.

Uma vez o conjunto  $E$  estruturado segundo um grupo Abelian, podemos definir o operador de translação por um elemento de  $E$ , que chamaremos de vetor (apesar dele não ser um elemento de um espaço vetorial), e pelo operador de transposição.

**Definição 4.4** (translação por um vetor) – Seja  $X$  um subconjunto de um grupo Abelian  $E$ . O *translado* de  $X$  por um vetor  $u$  de  $E$  é o subconjunto denotado  $X + u$  e dado por

$$X + u = \{x \in E : x - u \in X\}.$$

A *translação pelo vetor*  $u$  de  $E$ , denotada  $\tau_u$ , é o operador sobre  $\mathcal{P}(E)$  dado por

$$X \mapsto \tau_u(X) = X + u. \quad \square$$

**Exercício 4.4** (representação de um singleton) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Mostre que, para todo  $u$  e  $y$  em  $E$ ,

$$\{y + u\} = \{y\} + u. \quad \square$$

**Prova** – Para todo  $u$  e  $y$  em  $E$ ,

$$\begin{aligned} \{y\} + u &= \{x \in E : x - u \in \{y\}\} && \text{(definição de translado)} \\ &= \{x \in E : x - u = y\} && \text{(definição de singleton)} \\ &= \{x \in E : x = y + u\} && \text{(propriedade de +)} \\ &= \{y + u\}. && \text{(definição de singleton)} \end{aligned} \quad \square$$

A Figura 4.5 mostra em cinza mais escuro o translado do subconjunto  $X$  de  $\text{Ret}(9, 10)$  da Figura 4.4 pelo vetor  $u = (4, 3)$  de  $\text{Ret}(9, 10)$ . Na Figura 4.5, a origem  $o$  é o ponto  $(0, 0)$ .

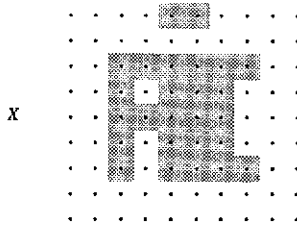


Fig. 4.4 – Um subconjunto.

Denotamos por  $X - u$  o translado de  $X$  por  $-u$ .

A Figura 4.6 ilustra, através de um bloquinho, a translação pelo vetor  $u = (4, 3)$  e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

Em Morfologia Matemática, uma classe muito estudada de operadores é a classe dos operadores invariantes por translação.

**Definição 4.5** (invariança por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Um operador  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  é *invariante por translação* (i.t.) se e somente se, para todo  $u \in E$ ,

$$\psi\tau_u = \tau_u\psi. \quad \text{(invariança por translação)}$$

Em outros termos, para todo  $X \in \mathcal{P}(E)$  e  $u \in E$ ,

$$\psi(X + u) = \psi(X) + u. \quad \square$$

A complementação é um exemplo de operador i.t., para todo  $X \in \mathcal{P}(E)$  e  $u \in E$ ,

$$(X + u)^c = X^c + u.$$

**Proposição 4.5** (propriedades dos operadores invariantes por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Os operadores sobre  $\mathcal{P}(E)$ , invariantes por translação, formam um sub-reticulado completo de  $(\mathcal{P}(E)^{\mathcal{P}(E)}, \leq)$  e são fechados relativamente a composição.  $\square$

**Prova** – Ver [HeiRon90, Proposição 3.1].  $\square$



Fig. 4.5 – Translado de um subconjunto por um vetor.

**Proposição 4.6** (propriedades do translado) – Seja  $E$  um grupo Abelian com elemento neutro  $o$ . Para todo  $X, X_1$  e  $X_2$  em  $\mathcal{P}(E)$ , e para todo  $u$  e  $v$  em  $E$ ,

- (1)  $X + o = X$
- (2)  $(X + u) + v = X + (u + v)$
- (3)  $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow (X_1 + u) \subset (X_2 + u)$ . □

**Exercício 4.5** (propriedades do translado) – Prove a Propriedade (2) ou (3) do translado. □

Como consequência da Proposição 4.6, temos, para toda família de elementos  $X_i$  em  $\mathcal{P}(E)$  e todo  $u$  em  $E$ ,

$$\left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) + u = \bigcup_{i \in I} (X_i + u)$$

$$\left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) + u = \bigcap_{i \in I} (X_i + u).$$



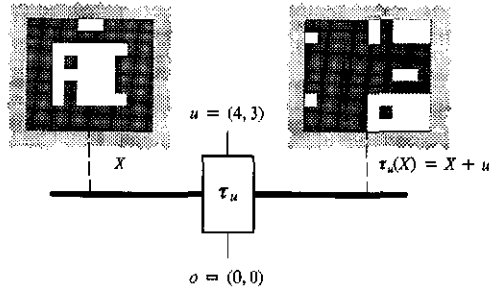


Fig. 4.6 – Um operador de translação.

A partir das propriedades do traslado podemos enunciar as das translações.

**Proposição 4.7** (propriedades das translações) – Seja  $E$  um grupo Abeliiano com elemento neutro  $o$ . O conjunto das translações, provido da composição, forma um grupo Abeliiano de automorfismos invariantes por translação, isto é, para todo vetor  $u, u_1, u_2$  e  $u_3$  em  $E$  e todo  $X_1$  e  $X_2$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

- (1)  $\tau_{u_1}\tau_{u_2} = \tau_{u_2}\tau_{u_1}$  (comutatividade)
- (2)  $(\tau_{u_1}\tau_{u_2})\tau_{u_3} = \tau_{u_1}(\tau_{u_2}\tau_{u_3})$  (associatividade)
- (3)  $\exists \nu \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \tau_u\nu = \nu\tau_u = \tau_u$  (lei do elemento neutro)
- (4)  $\exists \tau' \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \tau_u\tau' = \tau'\tau_u = \nu$  (lei do oposto)
- (5)  $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow \tau_u(X_1) \subset \tau_u(X_2)$  (isotonia dupla)
- (6)  $\tau_u\tau_{-u} = \iota$  (bijeção)

O composto  $\tau_{u_1}\tau_{u_2}$  é a translação  $\tau_{u_1+u_2}$ , o elemento neutro  $\tau$  é a translação  $\tau_o$  ( $\tau_o$  é o operador identidade  $\iota$ ) e o oposto de  $\tau_u$  é a translação  $\tau_{-u}$ . □

**Exercício 4.6** (propriedades das translações) – Prove duas das propriedades do enunciado da Proposição 4.7. Use, quando for o caso, a Proposição 4.6. □

A comutatividade das translações corresponde exatamente à propriedade de invariância por translação. A isotonia dupla e a bijeção fazem da translação  $\tau_u$  um *automorfismo* sobre  $\mathcal{P}(E)$ . Por ser um automorfismo,  $\tau_u$  é uma dilatação e uma erosão, para todo  $u$  em  $E$  e  $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\tau_u(\sup \mathcal{X}) = \sup \tau_u(\mathcal{X}) \text{ e } \tau_u(\inf \mathcal{X}) = \inf \tau_u(\mathcal{X}).$$

Quando  $E$  é provido de uma adição, é importante estudar, além da translação, um outro operador chamado de transposição.

**Definição 4.6** (transposição) – Seja  $X$  um subconjunto de um grupo Abeliiano  $E$ . O *transposto* (em relação a origem) de  $X$  é o subconjunto denotado  $X^t$  e dado por

$$X^t = \{x \in E : -x \in X\}.$$

A *transposição*, denotada  $\tau$ , é o operador sobre  $\mathcal{P}(E)$  dado por

$$X \mapsto \tau(X) = X^t. \quad \square$$

A Figura 4.7 mostra em cinza mais escuro o transposto do subconjunto  $X$  da Figura 4.4. Na Figura 4.7, a origem  $o$  é o ponto  $(0, 0)$ .

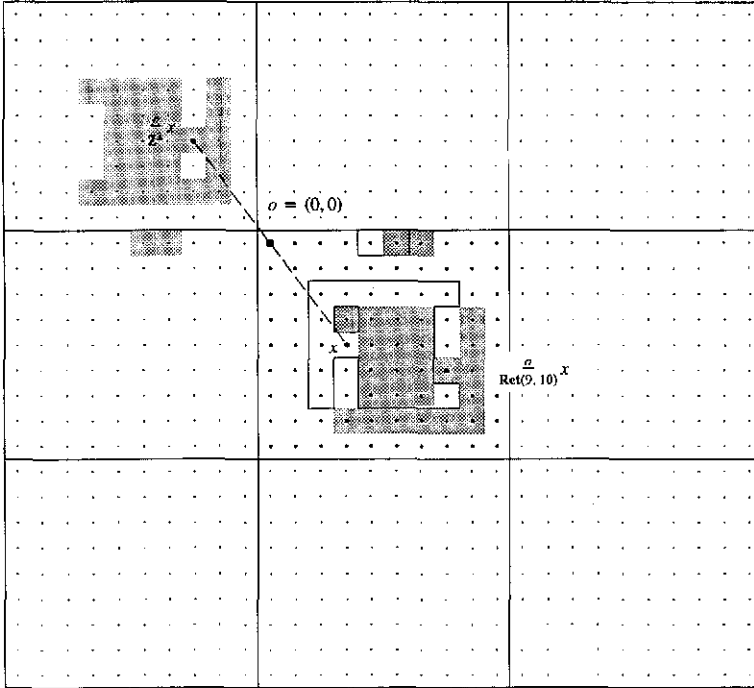


Fig. 4.7 – Transposto de um subconjunto.

A Figura 4.8 ilustra, através de um bloquinho, a transposição e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

Um subconjunto  $X$  de  $E$  é simétrico (em relação a origem) se e somente se  $X = X^t$ .

Considerando  $E$  como um grupo Abeliiano sobre um espaço afim ligado ao retângulo  $\text{Ret}(5,5)$ , a Figura 4.9 mostra, em (a), um subconjunto  $B_1$  simétrico (em relação a origem  $o = (2,2)$ ) e, em (b), um subconjunto  $B_2$  não simétrico (em relação a origem  $o = (0,0)$ ).

**Proposição 4.8** (propriedades do transposto) – Seja  $E$  um grupo Abeliiano. Para todo  $X, X_1$  e  $X_2$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$(1) (X^t)^t = X$$

$$(2) X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow X_1^t \subset X_2^t. \quad \square$$

**Exercício 4.7** (propriedades do transposto) – Prove a Propriedade (1) ou (2) do transposto. □

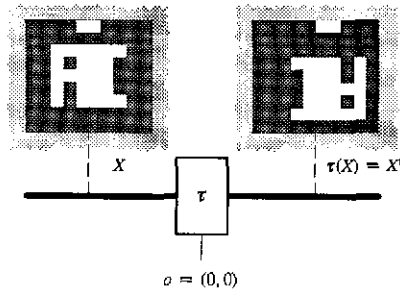


Fig. 4.8 – Transposição.

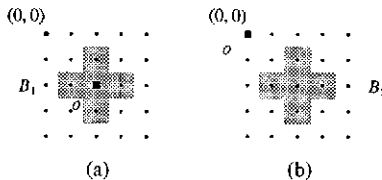


Fig. 4.9 – Simetria de um subconjunto (em relação a origem).

Como consequência da Proposição 4.8, temos, para toda família de elementos  $X_i$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^t = \bigcup_{i \in I} X_i^t$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^t = \bigcap_{i \in I} X_i^t$$

A partir das propriedades do transposto podemos enunciar as da transposição.

**Proposição 4.9** (propriedades da transposição) – Seja  $E$  um grupo Abelianho. As transposições sobre  $\mathcal{P}(E)$  formam um conjunto de automorfismos idempotentes de tipo 2, isto é, para todo  $X_1$  e  $X_2$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$(1) X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow \tau_u(X_1) \subset \tau_u(X_2) \quad (\text{isotonia dupla})$$

$$(2) \tau\tau = \text{id} \quad (\text{bijeção idempotente de tipo 2})$$

**Exercício 4.8** (propriedades da transposição) – Prove uma das propriedades do enunciado da Proposição 4.9. Use, quando for o caso, a Proposição 4.8. □

A isotonia dupla e a bijeção fazem da transposição  $\tau$  um *automorfismo* sobre  $\mathcal{P}(E)$ . Por ser um automorfismo,  $\tau$  é uma dilatação e uma erosão, para todo  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\tau(\text{sup}\mathcal{S}) = \text{sup}\tau(\mathcal{S}) \quad \text{e} \quad \tau(\text{inf}\mathcal{S}) = \text{inf}\tau(\mathcal{S}).$$

A transposição *não* é um operador invariante por translação como mostra a proposição seguinte.

**Proposição 4.10** (propriedades mútuas do traslado e do transposto) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Para todo  $X$  em  $\mathcal{P}(E)$  e  $u$  e  $v$  em  $E$ ,

$$(1) (X + u)^t = X^t - u$$

$$(2) u \in X + v \Leftrightarrow v \in X^t + u. \quad \square$$

**Prova** – Vamos provar a Propriedade (1). Para todo  $u \in E$ ,  $X \in \mathcal{P}$  e  $y \in E$ ,

$$y \in (X + u)^t \Leftrightarrow -y \in X + u \quad (\text{definição do transposto})$$

$$\Leftrightarrow (-y) - u \in X \quad (\text{definição do traslado})$$

$$\Leftrightarrow -(y + u) \in X \quad (\text{soma e oposto comutam})$$

$$\Leftrightarrow y + u \in X^t \quad (\text{definição do transposto})$$

$$\Leftrightarrow y \in X^t - u \quad (\text{definição do traslado})$$

isto é, para todo  $u \in E$ ,  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$(X + u)^t = X^t - u.$$

Vamos provar a Propriedade (2). Para todo  $u$  e  $v \in E$  e  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$u \in X + v \Leftrightarrow u - v \in X \quad (\text{definição do traslado})$$

$$\Leftrightarrow -(v - u) \in X \quad (\text{soma e oposto comutam})$$

$$\Leftrightarrow v - u \in X^t \quad (\text{definição do transposto})$$

$$\Leftrightarrow v \in X^t + u. \quad \square$$

A Figura 4.10 ilustra a Propriedade (2), enunciada na Proposição 4.10. Nesta figura, a origem  $o$  é o ponto  $(0, 0)$ . Em (a), a área cinza representa um subconjunto  $X$  particular; em (b), a área cinza representa o transposto  $X^t$ ; em (c), os dois pontos pretos representam dois pontos  $u$  e  $v$  de  $E$  e a área cinza o traslado  $X + v$ ; em (d) a área cinza representa  $X^t + u$ , o traslado por  $u$  do transposto de  $X$ . Observa-se quem, em (c),  $u$  pertence a  $X + v$  e, em (d),  $v$  pertence a  $X^t + u$ .

A partir das propriedades mútuas do traslado e do transposto podemos enunciar as das translações e da transposição.

**Proposição 4.11** (propriedades mútuas da translação e da transposição) – Para todo  $u$  e  $v \in E$  e  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$(1) \tau\tau_u = \tau_{-u}.$$

$$(2) u \in \tau_v(X) \Leftrightarrow v \in \tau_u\tau(X). \quad \square$$

**Prova** – Vamos provar a Propriedade (1). Para todo  $u \in E$ ,  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\tau\tau_u(X) = \tau(\tau_u(X)) \quad (\text{definição da composição})$$

$$= \tau(X + u) \quad (\text{definição da translação})$$

$$= (X + u)^t \quad (\text{definição da transposição})$$

$$= X^t - u \quad (\text{Proposição 4.10})$$

$$= \tau_{-u}(X^t) \quad (\text{definição da translação})$$

$$= \tau_{-u}(\tau(X)) \quad (\text{definição da transposição})$$

$$= \tau_{-u}\tau(X). \quad (\text{definição da composição})$$

Vamos provar a Propriedade (2). Para todo  $u \in E$  e  $X \in \mathcal{P}$ ,

- $u \in \tau_v(X) \Leftrightarrow u \in X + v$  (definição da translação)
- $\Leftrightarrow v \in X^\dagger + u$  (Proposição 4.10)
- $\Leftrightarrow v \in \tau_u(X^\dagger)$  (definição da translação)
- $\Leftrightarrow v \in \tau_u(\tau(X))$  (definição da transposição)
- $\Leftrightarrow v \in \tau_u \tau(X)$ . (definição da composição) □

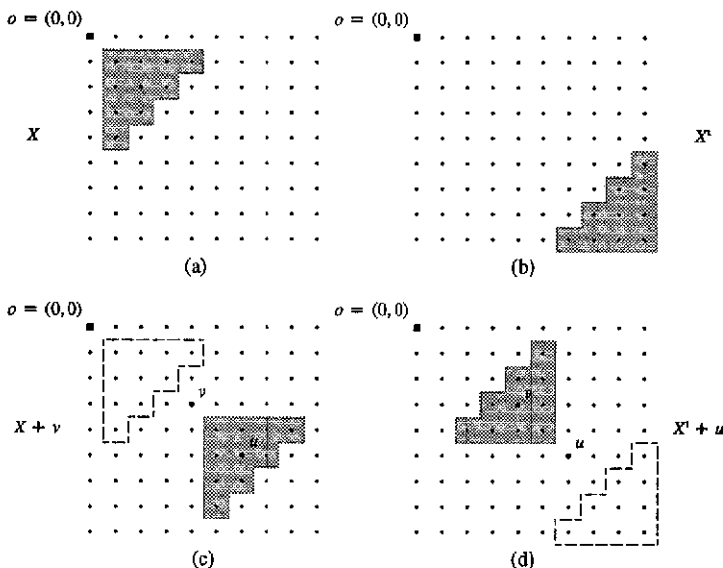


Fig. 4.10 – Relação entre o traslado e o transposto.

## 4.2 Adição e subtração de Minkowski

Na seção anterior, foram vistas a adição entre dois pontos de  $E$  e a adição entre um subconjunto e um ponto (a translação). Nesta seção, vamos definir a adição entre dois subconjuntos, conhecida como a adição de Minkowski [Minkow03].

**Definição 4.7** (adição de Minkowski) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $E$ . A soma de Minkowski de  $A$  e  $B$  é o subconjunto de  $E$ , denotado  $A \oplus B$  e dado por

$$A \oplus B = \{x \in E : \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B, x = a + b\}.$$

A adição de Minkowski, denotada  $\oplus$ , é o mapeamento dado por

$$(A, B) \mapsto A \oplus B. \quad \square$$

A Figura 4.11 ilustra a construção da soma de Minkowski de dois subconjuntos  $A$  e  $B$ .

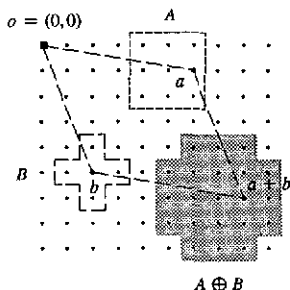


Fig. 4.11 – Soma de Minkowski de dois subconjuntos.

A Figura 4.12 mostra três exemplos de soma de Minkowski. Observamos que a soma de um subconjunto por um singleton contendo a origem é o próprio subconjunto. Os resultados destas três somas ilustram uma solução do problema de interpolação de formas. Entre a cruz e o quadrado de tamanho  $5 \times 5$ , resultantes da primeira e terceira somas, temos uma forma intermediária, resultante da soma de uma cruz e de um quadrado de tamanho  $3 \times 3$ .

Seja  $B$  um subconjunto de  $E$  e  $n$  um número inteiro não negativo. Às vezes, é útil denotarmos por  $nB$  o subconjunto de  $E$  dado pela composição de  $n - 1$  adições de Minkowski, isto é,

$$nB = (\dots(B \oplus B) \oplus B \dots) \oplus B$$

se  $n$  for maior que 1, o próprio conjunto  $B$ , se  $n$  for 1, e o singleton  $\{o\}$ , se  $n$  for 0.

**Proposição 4.12** (propriedades da soma de Minkowski) – Para todo  $A, B$ , e  $C$  em  $\mathcal{P}$  e  $u$  em  $E$ ,

- (1)  $A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A + b$  (definição equivalente)
- (2)  $A \oplus B = B \oplus A$  (comutatividade)
- (3)  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$  (associatividade)
- (4)  $A \oplus \{o\} = A$  (lei do elemento neutro)
- (5)  $(A \oplus B) + u = (A + u) \oplus B$  (translação versus soma de Minkowski)
- (6)  $o \in B \Rightarrow A \subset A \oplus B.$  □

**Prova** – Propriedade (1). Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e para todo  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned}
 x \in A \oplus B &\Leftrightarrow \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B, x = a + b && \text{(definição de } \oplus \text{)} \\
 &\Leftrightarrow \exists b \in B, (\exists a \in A, x = a + b) && \text{(equivalência lógica)} \\
 &\Leftrightarrow \exists b \in B, (\exists a \in A, a = x - b) && \text{(propriedade de } + \text{)}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B, x - b \in A \quad (\text{equivalência lógica})$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B, x \in A + b \quad (\text{definição de translado})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{b \in B} A + b. \quad (\text{definição de união})$$

Propriedade (2). Ela decorre da comutatividade da soma em  $E$ .

Propriedade (3). Ela decorre da associatividade da soma em  $E$ .

Propriedade (4). Para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$A \oplus \{o\} = \bigcup_{b \in \{o\}} A + b \quad (\text{Propriedade (1)})$$

$$= A + o \quad (\text{família reduzida a um membro})$$

$$= A. \quad (\text{propriedade do translado})$$

Propriedade (5). Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e  $u$  em  $E$ ,

$$(A \oplus B) + u = \left( \bigcup_{b \in B} A + b \right) + u \quad (\text{Propriedade (1)})$$

$$= \bigcup_{b \in B} (A + b) + u \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \bigcup_{b \in B} A + (b + u) \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \bigcup_{b \in B} A + (u + b) \quad (\text{comutatividade da adição})$$

$$= \bigcup_{b \in B} (A + u) + b \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \left( \bigcup_{b \in B} A + u \right) + b \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= (A + u) \oplus B. \quad (\text{Propriedade (1)})$$

Propriedade (6). Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e para todo  $x \in E$ ,

$$(x \in A \text{ e } o \in B) \Rightarrow x + o \in A \oplus B \quad (\text{definição de } \oplus)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \oplus B. \quad (\text{propriedade de } +)$$

Isto é, para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$o \in B \Rightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in A \oplus B)$$

$$\Leftrightarrow A \subset A \oplus B. \quad (\text{definição de inclusão})$$

□

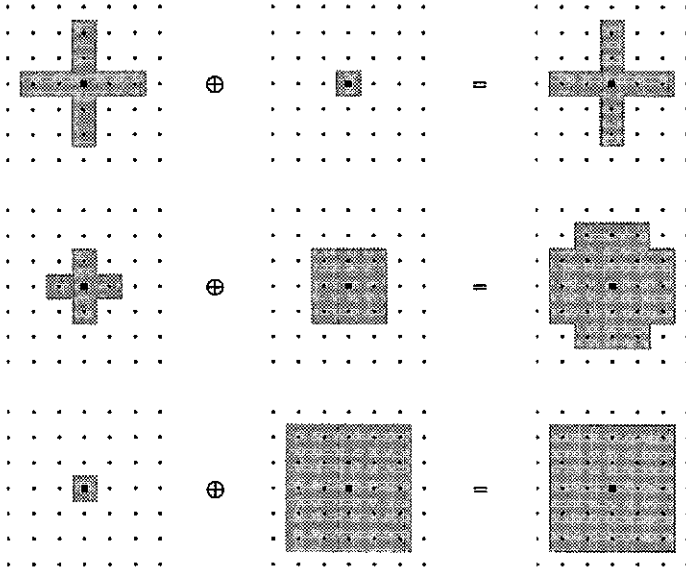


Fig. 4.12 – Três exemplos de soma de Minkowski.

**Exercício 4.9** (propriedades da soma de Minkowski) – Prove uma das propriedades abaixo. Para todo  $A, A_1, A_2, B, B_1$  e  $B_2$  em  $\mathcal{P}$ ,

- (1)  $A \oplus B = \{x \in E : (B^t + x) \cap A \neq \emptyset\}$  (definição equivalente)
- (2)  $(A_1 \cup A_2) \oplus B = (A_1 \oplus B) \cup (A_2 \oplus B)$  (distributividade de  $\oplus$ )
- (3)  $A \oplus (B_1 \cup B_2) = (A \oplus B_1) \cup (A \oplus B_2)$  (distributividade de  $\oplus$ )
- (4)  $(A_1 \cap A_2) \oplus B \subset (A_1 \oplus B) \cap (A_2 \oplus B)$
- (5)  $A \oplus (B_1 \cap B_2) \subset (A \oplus B_1) \cap (A \oplus B_2)$
- (6)  $A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow A_1 \oplus B \subset A_2 \oplus B$
- (7)  $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow A \oplus B_1 \subset A \oplus B_2$
- (8)  $\emptyset \oplus B = \emptyset$
- (9)  $E \oplus B = \begin{cases} E & \text{se } B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{c.c..} \end{cases}$  □

Após várias décadas, Hadwiger [Hadwig50, Hadwig57] definiu a subtração de Minkowski que tem um papel tão importante quanto a soma de Minkowski em morfologia de subconjunto.



**Definição 4.8** (subtração de Minkowski) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $E$ . A *diferença de Minkowski* entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto de  $E$ , denotado  $A \ominus B$  e dado por

$$A \ominus B = \{y \in E : \forall b \in B, (\exists a \in A, y = a - b)\}.$$

A *subtração de Minkowski*, denotada  $\ominus$ , é o mapeamento dado por

$$(A, B) \mapsto A \ominus B.$$

□

A Figura 4.13 ilustra a construção da diferença de Minkowski entre dois subconjuntos  $A$  e  $B$ .

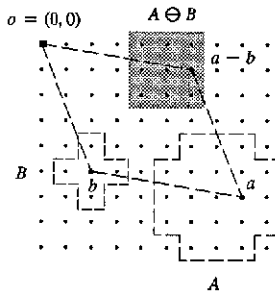


Fig. 4.13 – Diferença de Minkowski entre dois subconjuntos.

**Proposição 4.13** (propriedades da diferença de Minkowski) – Para todo  $A, B, e C$  em  $\mathcal{P}$  e  $u$  em  $E$ ,

$$(1) A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A - b \quad (\text{definição equivalente})$$

$$(2) (A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$$

$$(3) A \ominus \{o\} = A$$

$$(4) (A \ominus B) + u = (A + u) \ominus B \quad (\text{translação versus a diferença de Minkowski})$$

$$(5) o \in B \Rightarrow A \ominus B \subset A. \quad \square$$

**Prova** – Propriedade (1). Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e para todo  $y \in E$ ,

$$y \in A \ominus B \Leftrightarrow \forall b \in B, (\exists a \in A, y = a - b) \quad (\text{definição de } \ominus)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, (\exists a \in A, a = y + b) \quad (\text{propriedade da } +)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, y + b \in A \quad (\text{equivalência lógica})$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B, y \in A - b \quad (\text{definição de translado})$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcap_{b \in B} A - b. \quad (\text{definição de interseção})$$

Propriedade (2). Para todo  $A, B, e C$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$(A \ominus B) \ominus C = \bigcap_{c \in C} (\bigcap_{b \in B} A - b) - c \quad (\text{Propriedade (1)})$$

$$= \bigcap_{c \in C} \bigcap_{b \in B} (A - b) - c \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \bigcap_{c \in C} \bigcap_{b \in B} A - (b + c) \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \bigcap_{b \in B \text{ e } c \in C} A - (b + c) \quad (\text{associatividade da interseção})$$

$$= \bigcap_{x \in B \oplus C} A - x \quad (\text{definição de soma de Minkowski})$$

$$= A \ominus (B \oplus C). \quad (\text{Propriedade (1)})$$

Propriedade (3). Para todo  $A$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$A \ominus \{o\} = \bigcap_{b \in \{o\}} A - b \quad (\text{Propriedade (1)})$$

$$= A - o \quad (\text{família reduzida a um membro})$$

$$= A. \quad (\text{propriedade do translado})$$

Propriedade (4). Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e  $u$  em  $E$ ,

$$(A \ominus B) + u = \left( \bigcap_{b \in B} A - b \right) + u \quad (\text{Propriedade (1)})$$

$$= \bigcap_{b \in B} (A - b) + u \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \bigcap_{b \in B} A + ((-b) + u) \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \bigcap_{b \in B} A + (u - b) \quad (\text{comutatividade da adição})$$

$$= \bigcap_{b \in B} (A + u) - b \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= \left( \bigcap_{b \in B} A + u \right) - b \quad (\text{propriedade do translado})$$

$$= (A + u) \ominus B. \quad (\text{Propriedade (1)})$$

Propriedade (5). Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e para todo  $y \in E$ ,

$$(y \in A \ominus B \text{ e } o \in B) \Rightarrow (\exists a \in A, y = a - o) \quad (\text{definição de } \ominus)$$

$$\Leftrightarrow (\exists a \in A, y = a) \quad (\text{propriedade da } +)$$

$$\Leftrightarrow y \in A \quad (\text{equivalência lógica})$$

Isto é, para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$o \in B \Rightarrow (\forall y \in E, y \in A \ominus B \Rightarrow y \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \ominus B \subset A. \quad (\text{definição de inclusão})$$

□

**Exercício 4.10** (propriedades da diferença de Minkowski) – Prove uma das propriedades abaixo. Para todo  $A, A_1, A_2, B, B_1 \in \mathcal{P}(E)$  em  $\mathcal{P}$ .

$$(1) A \ominus B = \{y \in E : (B + y) \subset A\} \quad (\text{definição equivalente})$$

$$(2) (A_1 \ominus B) \cup (A_2 \ominus B) \subset (A_1 \cup A_2) \ominus B$$

$$(3) A \ominus (B_1 \cup B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A \ominus B_2)$$

$$(4) (A_1 \cap A_2) \ominus B = (A_1 \ominus B) \cap (A_2 \ominus B) \quad (\text{distributividade de } \ominus)$$

$$(5) (A \ominus B_1) \cup (A \ominus B_2) \subset A \ominus (B_1 \cap B_2)$$

$$(6) A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow A_1 \ominus B \subset A_2 \ominus B$$

$$(7) B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow A \ominus B_2 \subset A \ominus B_1$$

$$(8) E \ominus B = E$$

$$(9) \emptyset \ominus B = \begin{cases} \emptyset & \text{se } B \neq \emptyset \\ E & \text{c.c.} \end{cases} \quad \square$$

### 4.3 Dilatações e erosões invariantes por translação

O conjunto das dilatações (resp. erosões) invariantes por translação, como interseção do reticulado completo das dilatações (resp. erosões) e o reticulado completo dos operadores invariantes por translação é também um reticulado completo.

Para caracterizar os operadores elementares invariantes por translação é interessante definir a noção de função invariante por translação.

**Definição 4.9** (função invariante por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Uma função  $b$  de  $E$  em  $\mathcal{P}(E)$  é *invariante por translação* (i.t.), se e somente se, as propriedades equivalentes abaixo são verificadas.

$$(1) \forall u \text{ e } y \in E, b(y + u) = b(y) + u$$

$$(2) \exists B \in \mathcal{P}(E), \forall y \in E, b(y) = B + y. \quad \square$$

**Exercício 4.11** (função invariante por translação) – Mostre a equivalência entre as Propriedades (1) e (2) da Definição 4.9. □

Usando a adição de Minkowski, podemos agora caracterizar as dilatações invariantes por translação.

**Proposição 4.14** (propriedades das dilatações invariantes por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\delta$  uma dilatação sobre  $\mathcal{P}(E)$  e seja  $b$  sua função estruturante, então as três propriedades abaixo são equivalentes.

$$(1) b \text{ é invariante por translação}$$

$$(2) \delta(Y) = Y \oplus B \quad (Y \in \mathcal{P}(E)) \text{ e } B = \delta(\{o\})$$

$$(3) \delta \text{ é invariante por translação.} \quad \square$$

**Prova** – Vamos provar que (1) implica (2). Para todo  $Y \in \mathcal{P}$  e para todo  $x \in E$ ,

$$x \in \delta(Y) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{y \in Y} b(y) \quad (\text{caracterização das dilatações})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{y \in Y} (B + y) \quad (\text{definição de função i.t. e Hipótese (1)})$$

$$\Leftrightarrow x \in B \oplus Y. \quad (\text{definição de } \oplus)$$

Isto é, pela comutatividade de  $\oplus$ , para todo  $Y \in \mathcal{P}$ ,

$$\delta(Y) = Y \oplus B.$$

Em consequência,

$$\begin{aligned} \delta(\{o\}) &= \{o\} \oplus B && (Y = \{o\}) \\ &= B. && (\text{propriedade de } \oplus) \end{aligned}$$

Vamos provar que (2) implica (3). Para todo  $x \in E$  e para todo  $Y \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \delta(Y + u) &= (Y + u) \oplus B && (\text{Hipótese (2)}) \\ &= (Y \oplus B) + u && (\text{propriedade de } \oplus) \\ &= \delta(Y) + u. && (\text{Hipótese (2)}) \end{aligned}$$

Isto é,  $\delta$  é invariante por translação.  $\square$

Vamos provar que (3) implica (1). Para todo  $y \in E$ ,

$$\begin{aligned} b(y + u) &= \delta(\{y + u\}) && (\text{definição de função estruturante de } \delta) \\ &= \delta(\{y\} + u) && (\text{Exercício 4.4}) \\ &= \delta(\{y\}) + u. && (\text{Hipótese (3)}) \\ &= b(y) + u. && (\text{definição de função estruturante de } \delta) \end{aligned}$$

Isto é,  $b$  é invariante por translação.  $\square$

A partir da Proposição 4.14, podemos caracterizar as dilatações invariantes por translação.

**Proposição 4.15** (caracterização das dilatações i.t.) – Seja  $\Delta'$  o conjunto das dilatações i.t. O mapeamento de  $\Delta'$  em  $\mathcal{P}^E$ ,

$$\delta \mapsto B_\delta,$$

onde  $B_\delta$  é o subconjunto dado por

$$B_\delta = \delta(\{o\})$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$B \mapsto \delta_B.$$

onde  $\delta_B$  é a dilatação i.t. dada por

$$\delta_B(Y) = Y \oplus B \quad (Y \in \mathcal{P}). \quad \square$$

**Prova** – Antes de tudo, temos que verificar que  $\delta_B$  é uma dilatação i.t.. Seja  $B \in \mathcal{P}$ , seja  $b$  um mapeamento de  $E$  em  $\mathcal{P}$  tal que

$$b(y) = B + y \quad (y \in E)$$

e seja  $\delta_b$  a dilatação pela função estruturante  $b$ . Para todo  $Y$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_b(Y) &= Y \oplus B && \text{(Proposição 4.14, ((1) implica (2)))} \\ &= \delta_B(Y). \end{aligned}$$

Isto é, pela Proposição 3.5,  $\delta_B$  é uma dilatação e pela Proposição 4.14, ((2) implica (3))  $\delta_B$  é i.t.

Vamos provar que  $\delta \mapsto B_\delta$  é uma bijeção. Em primeiro lugar, para todo  $\delta \in \Delta'$  e  $Y \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{B_\delta}(Y) &= Y \oplus B_\delta && \text{(definição de } \delta_B) \\ &= Y \oplus \delta(\{o\}) && \text{(definição de } B_\delta) \\ &= \delta(Y), && \text{(Proposição 4.14, ((3) implica (2)))} \end{aligned}$$

em outros termos, para todo  $\delta \in \Delta'$ ,  $\delta_{B_\delta} = \delta$ . Isto prova que o mapeamento  $\delta \mapsto B_\delta$  é injetor.

Em segundo lugar, para todo  $B \in \mathcal{P}$  e  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in B_{\delta_B} &\Leftrightarrow x \in \delta_B(\{o\}) && \text{(definição de } B_\delta) \\ &\Leftrightarrow x \in \{o\} \oplus B && \text{(definição de } \delta_B) \\ &\Leftrightarrow x \in B. && \text{(propriedade de } \oplus) \end{aligned}$$

em outros termos, para todo  $B \in \mathcal{P}$ ,  $a_{B_\delta} = B$ . Isto prova que o mapeamento  $\delta \mapsto B_\delta$  é sobrejetor e conseqüentemente é uma bijeção.  $\square$

A Proposição 4.15 mostra que existe uma correspondência um por um entre  $\Delta'$  e  $\mathcal{P}$ . Os subconjuntos de  $E$  caracterizam sem ambigüidade as dilatações i.t.. A figura 4.14 ilustra este resultado. O subconjunto  $B_\delta$  é chamado de *elemento estruturante da dilatação i.t.  $\delta$* .

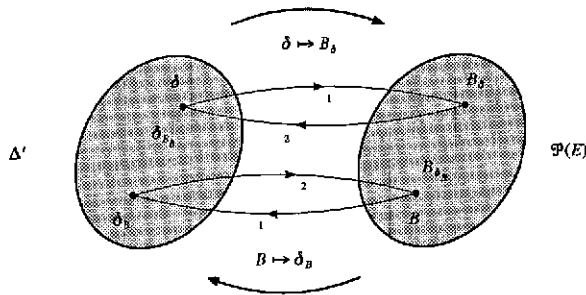


Fig. 4.14 – Bijeção entre as dilatações i.t. e os subconjuntos.

Para um dado subconjunto  $Y$ , o subconjunto  $\delta_B(Y)$  chama-se de *dilatação de  $Y$  pelo elemento estruturante  $B$* .

Podemos caracterizar de uma maneira análoga as erosões, anti-dilatações e anti-erosões por elementos estruturantes. Nestes casos, para um dado subconjunto  $X$ , os subconjuntos  $\varepsilon_B(X)$ ,  $\delta^a_B(X)$  e  $\varepsilon^a_B(X)$  chamam-se, respectivamente, de *erosão*, *anti-dilatação* e *anti-erosão* de  $X$  pelo elemento estruturante  $B$  e são dados por,

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B$$

$$\delta^a_B(X) = (X \oplus B^c)^c$$

$$\varepsilon^a_B(X) = (X \ominus B)^c.$$

A Figura 4.15 mostra um exemplo de dilatação de um subconjunto por um elemento estruturante. A Figura 4.16 mostra dois modos de construir o dilatado de um subconjunto. Em (a), usamos a definição equivalente de soma de Minkowski, dada na Proposição 4.12 (Propriedade (1)). Neste modo, o dilatado é obtido “pintando” com o quadradinho, cujo centro permanece dentro do conjunto a ser dilatado. Em (b), usamos a definição equivalente de soma de Minkowski dada no Exercício 4.9 (Propriedade(1)). Neste modo, o dilatado é o conjunto de todos os centros dos quadradinhos que *tocam* o conjunto a ser dilatado.

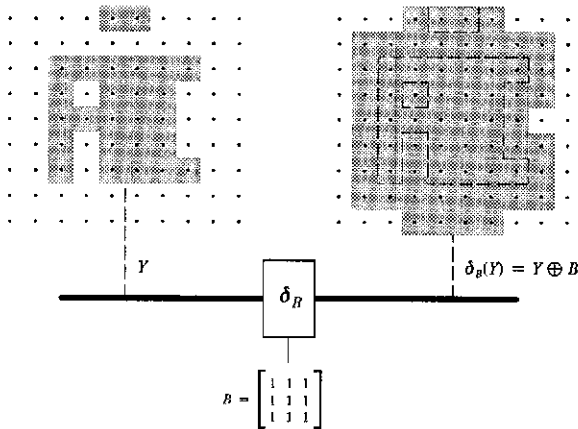


Fig. 4.15 – Dilatação de um subconjunto por um elemento estruturante.

A Figura 4.17 mostra um exemplo de erosão de um subconjunto por um elemento estruturante. A Figura 4.18 mostra o modo de construir o erodido de um subconjunto. Usamos a definição equivalente de diferença de Minkowski, dada no Exercício 4.10 (Propriedade(1)), onde o erodido é o conjunto de todos os centros dos quadradinhos que *estão contidos* no conjunto a ser erodido.

Vamos, agora, introduzir uma representação matricial para os elementos estruturantes. Seja  $B$  um subconjunto do retângulo  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ . Usando a bijeção  $B \mapsto I_B$  do Capítulo 2 e escrevendo  $I_B$  na forma matricial

$$\left[ I_B(i + 1, j + 1) \right]_{n_1 \times n_2}$$

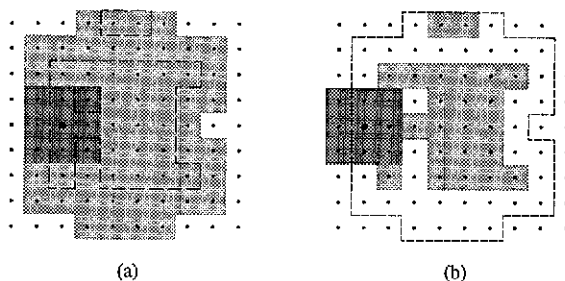


Fig. 4.16 – Dois modos de construir o dilatado.

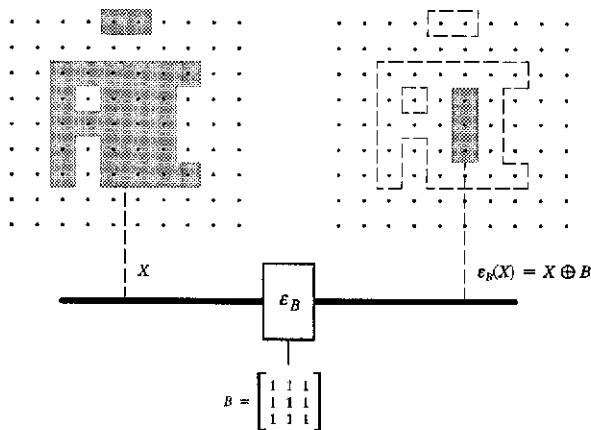


Fig. 4.17 – Erosão de um subconjunto por um elemento estruturante.

onde  $I_B(i + 1, j + 1)$  representa o elemento da  $i$ ésima linha e  $j$ ésima coluna da matriz de dimensão  $n_1 \times n_2$ , temos uma representação para o conjunto  $B$ . Por abuso de linguagem, escrevemos então  $B$  na forma de uma matriz de zeros e uns

$$B = [b_{ij}]_{n_1 \times n_2}$$

Seja  $E$  um grupo Abelian sobre um espaço afim ligado a  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ . Como pode ser observado na expressão da soma em  $E$ ,

$$a \stackrel{\circ}{+} b = a \underset{\text{Ret}(n_1, n_2)}{+} \vec{ob},$$

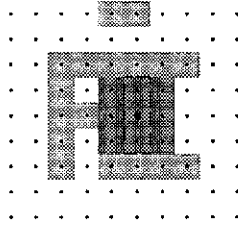


Fig. 4.18 – Modo de construir o erodido.

para cômputar esta soma, basta conhecer a posição relativa de apenas um dos dois pontos (aqui  $b$ ) em relação à origem  $o$ . Em Morfologia Matemática, na hora de calcular a dilatação i.t. de um subconjunto  $X$  por um elemento estruturante  $B$  (i.e.  $X \oplus B$ ) é habitual definir a posição relativa do elemento estruturante  $B$  (e não  $X$ ) em relação à origem.

Neste caso, devemos acrescentar à representação de  $B$  a indicação do ponto  $o$  de  $\text{Ret}(n_1, n_2)$  escolhido como origem (isto é, como elemento neutro do grupo). Escrevemos então  $B$  na forma de um par

$$B = \left( \left[ b_{ij} \right]_{n_1 \times n_2}, o \right).$$

Por exemplo, os subconjuntos  $B_1$  e  $B_2$  mostrados na Figura 4.9 poderão ser escritos então

$$B_1 = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (2, 2) \right) \quad \text{e} \quad B_2 = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (0, 0) \right).$$

Para simplificar a notação, adotamos a convenção de realçar o elemento posicionado na origem,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como os elementos estruturantes são geralmente subconjuntos com poucos pontos e que estes estão agrupados, para simplificar ainda mais a notação, representamos estes na forma da menor submatriz que contém todos os 1s e o elemento posicionado na origem. Desta forma, os subconjuntos  $B_1$  e  $B_2$  mostrados na Figura 4.9 poderão ser escritos

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta última forma de representar um subconjunto, é entendido que os elementos não representados valem 0.



Seja  $m_1 \times m_2$  a dimensão da menor submatriz usado na representação de  $B$ , então  $B$  é dito de *dimensão*  $m_1 \times m_2$ .

As dilatações e erosões por um elemento estruturante tem todas as propriedades das dilatações e erosões já vistas no capítulo anterior e mais aquelas que decorrem das propriedades da adição e diferença de Minkowski.

**Proposição 4.16** (propriedades da dilatação por um elemento estruturante) – Seja  $B$  um subconjunto de um grupo Abeliano  $E$ . Seja  $\delta_B$  a dilatação pelo elemento estruturante  $B$ , isto é,

$$\delta_B(Y) = Y \oplus B \quad (Y \in \mathcal{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo  $B, B_1$  e  $B_2$  em  $\mathcal{P}$ ,

- (1)  $\delta_B(Y) = \bigcup_{b \in B} (Y + b) \quad (Y \in \mathcal{P})$
- (2)  $\delta_B(Y) = \{x \in E : (B^t + x) \cap Y \neq \emptyset\} \quad (Y \in \mathcal{P})$
- (3)  $\delta_B(\sup^{\mathcal{A}} \mathcal{Y}) = \sup \delta_B(\mathcal{Y}) \quad (\mathcal{Y} \subset \mathcal{P})$  (dilatação)
- (4)  $\tau_u \delta_B = \delta_B \tau_u \quad (u \in E)$  (invariança por translação)
- (5)  $\delta_{B_1} \delta_{B_2} = \delta_{B_1 \oplus B_2}$  (separabilidade)
- (6)  $\delta_{\{\circ\}} = \iota$  (identidade)
- (7)  $\circ \in B \Rightarrow \iota \leq \delta_B$  (extensividade)
- (8)  $\delta_{B_1} \vee \delta_{B_2} = \delta_{B_1 \cup B_2}$  (sup-fechamento)
- (9)  $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow \delta_{B_1} \leq \delta_{B_2}$  (isotonia dupla)
- (10)  $\delta_B(\emptyset) = \emptyset$ . (invariante)

□

**Prova** – As Propriedades (1) e (2) decorrem das definições equivalentes de adição de Minkowski.

As Propriedades (3) e (4) decorrem da Proposição 4.15.

As Propriedades (5), (6) e (7) decorrem da Proposição 4.12.

As Propriedades (8), (9) e (10) decorrem do Exercício 4.9. □

Pela comutatividade da adição de Minkowski e pela Propriedade (5), observamos que as dilatações i.t. são *comutativas* (o que não ocorre em geral com as dilatações não i.t.).

As Propriedades (5) e (8) são muito importantes na prática para programar dilatações por grandes elementos estruturantes a partir de dilatações com elementos estruturantes menores ou para melhorar o tempo de processamento (ver também Seção 8.2). Por exemplo, observando a seguinte decomposição do losângulo  $5 \times 5$  por dois losângulos  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

constatamos que o losângulo  $5 \times 5$  tem 13 pontos enquanto os dois losângulos  $3 \times 3$  somam juntos 10 pontos. Em termos de eficiência computacional é então preferível programar duas dilatações pelo

losângulo  $3 \times 3$  do que uma só dilatação pelo losângulo  $5 \times 5$ . Podemos até melhorar este resultado, observando a seguinte decomposição

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

constatamos que os dois elementos estruturantes  $3 \times 3$  somam juntos 9 pontos. A Figura 4.19 mostra o diagrama de blocos equivalente a uma dilatação pelo losângulo  $5 \times 5$ .

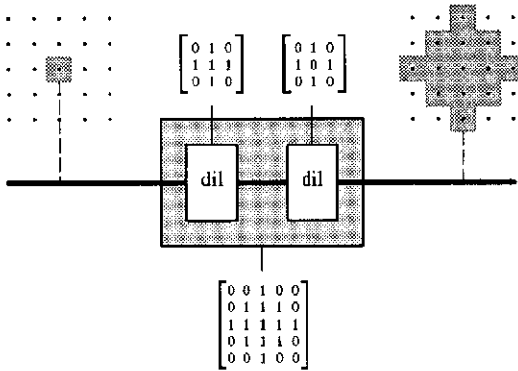


Fig. 4.19 – Diagrama de blocos de uma dilatação pelo losângulo 5 por 5.

**Exercício 4.12** (programação de uma dilatação por decomposição de elemento estruturante) – Seguindo a Propriedade (5), encontre o diagrama de blocos de uma dilatação pelo elemento estruturante  $B$  dado abaixo, usando apenas dilatações por elementos estruturantes  $3 \times 3$  com seus centros posicionados na origem.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Procure uma solução computacionalmente eficiente. □

**Exercício 4.13** (programação de uma dilatação por decomposição de elemento estruturante) – Seguindo as Propriedades (5) e (8), encontre o diagrama de blocos de uma dilatação pelo elemento estruturante  $B$  dado abaixo, usando apenas dilatações por elementos estruturantes  $3 \times 3$  com seus centros posicionados na origem.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Procure uma solução computacionalmente eficiente. □

**Proposição 4.17** (propriedades da erosão por um elemento estruturante) – Seja  $B$  um subconjunto de um grupo Abeliano  $E$ . Seja  $\varepsilon_B$  a erosão pelo elemento estruturante  $B$ , isto é,

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B \quad (X \in \mathcal{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo  $B, B_1$  e  $B_2$  em  $\mathcal{P}$ ,

- (1)  $\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X - b \quad (X \in \mathcal{P})$
- (2)  $\varepsilon_B(X) = \{y \in E : (B + y) \subset X\} \quad (X \in \mathcal{P})$
- (3)  $\varepsilon_B(\text{inf}\mathfrak{K}) = \text{inf}\varepsilon_B(\mathfrak{K}) \quad (\mathfrak{K} \subset \mathcal{P})$  (erosão)
- (4)  $\tau_u \varepsilon_B = \varepsilon_B \tau_u \quad (u \in E)$  (invariança por translação)
- (5)  $\varepsilon_{B_1} \varepsilon_{B_2} = \varepsilon_{B_1 \oplus B_2}$  (separabilidade)
- (6)  $\varepsilon_{\{o\}} = \text{id}$  (identidade)
- (7)  $o \in B \Rightarrow \varepsilon_B \leq \text{id}$  (anti-extensividade)
- (8)  $\varepsilon_{B_1} \wedge \varepsilon_{B_2} = \varepsilon_{B_1 \cup B_2}$  (inf-fechamento)
- (9)  $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow \varepsilon_{B_2} \leq \varepsilon_{B_1}$  (antitonia)
- (10)  $\varepsilon_B(E) = E$  (invariante)

□

**Exercício 4.14** (propriedades da erosão por um elemento estruturante) – Prove a Proposição 4.17. □

Pela comutatividade da adição de Minkowski e a Propriedade (5) observamos que as erosões i.t. são *comutativas* (o que *não* ocorre em geral com as erosões não i.t.).

## 4.4 Dilatações e erosões condicionalmente invariantes por translação

Em certas aplicações, os operadores elementares invariantes por translação podem apresentar efeitos de bordas indesejáveis, porque num ponto  $x$  de “borda” de  $E$  o elemento estruturante transladado  $B + x$  geralmente cobre simultaneamente as imediações da “borda” considerada e da “borda oposta”. Na prática, usa-se, então, operadores elementares que têm um comportamento similar aos operadores i.t. no “centro” de  $E$  e que nunca tem o efeito de “juntar” as “bordas opostas”.

Seja  $\mathbb{Z}^2$  o conjunto de pares ordenados de inteiros e seja  $E$  um retângulo de  $\mathbb{Z}^2$ . Vamos considerar as translações pelos vetores do grupo Abeliano  $(\mathbb{Z}^2, +)$ .

**Definição 4.10** (função condicionalmente invariante por translação) – Uma função  $b$  de  $E$  em  $\mathcal{P}(E)$  é *condicionalmente invariante por translação* (c.i.t.) se e somente se

$$\exists B \in \mathcal{P}(Z^2), \forall y \in E, b(y) = (B + y) \cap E. \quad \square$$

A partir da definição de função c.i.t. definimos as dilatações e as erosões condicionalmente invariantes por translação.

**Definição 4.11** (dilatação e erosão condicionalmente invariantes por translação) – Uma *dilatação* (resp. *erosão*) *condicionalmente invariante por translação* (c.i.t.) é uma dilatação  $\delta_b$  (resp. erosão  $\varepsilon_b$ ) por uma função estruturante  $b$  condicionalmente invariantes por translação.  $\square$

A dilatação  $\delta_b$  (resp. erosão  $\varepsilon_b$ ) da definição acima é a dilatação (resp. erosão) definida no enunciado da Proposição 3.5 (resp. 14.6).

Cada função c.i.t. pode ser caracterizado por um subconjunto  $B$  de  $E \oplus E^1$  [BanBar94]. Para todo  $B \in \mathcal{P}(E \oplus E^1)$ , denotamos por  $b_B$  a função c.i.t. definida por

$$b_B(y) = (B + y) \cap E \quad (y \in E).$$

Denotamos então por  $\delta_B$  (resp.  $\varepsilon_B$ ) a dilatação (resp. erosão) c.i.t. por  $b_B$  e chamamos  $B$  de *elemento estruturante da dilatação* (resp. *erosão*).

As Figuras 4.20 e 4.21 mostram a diferença de comportamento nas “bordas” de uma dilatação i.t. e de uma dilatação c.i.t. construídas a partir do mesmo elemento estruturante (o losângulo  $3 \times 3$ ).

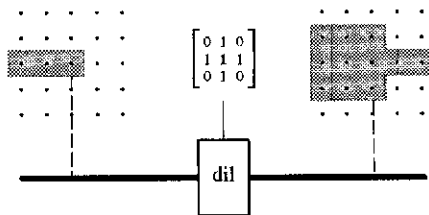


Fig. 4.20 – Dilatação invariante por translação.

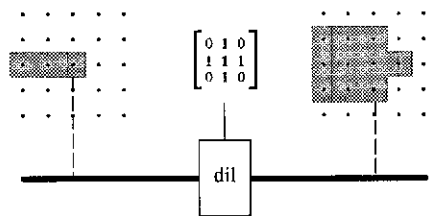


Fig. 4.21 – Dilatação condicionalmente invariante por translação.

# Capítulo 5

## Dualidades entre dilatações e erosões

Neste capítulo voltamos a considerar os operadores elementares do Capítulo 3 em toda sua generalidade, isto é, os operadores não serão necessariamente invariantes ou parcialmente invariantes por translação.

Dentro desse contexto definimos a dualidade entre dilatações e erosões, como uma correspondência um para um entre o conjunto das dilatações e o das erosões. Exemplificamos este conceito, apresentando duas das mais importantes dualidades conhecidas: aquela baseada na estrutura de reticulado completo e aquela baseada na estrutura de reticulado completo Booleano. Verificamos que a primeira é mais fundamental, porque é baseada na noção de conexão de Galois que é definida para qualquer reticulado completo.

O estabelecimento de uma dualidade, através das conexões de Galois, entre o reticulado das dilatações e o das erosões vai ser usada para deduzir uma caracterização das erosões a partir da caracterização das dilatações, apresentada no Capítulo 3. Esta dualidade vai ser importante também para deduzir propriedades dos operadores de abertura e fechamento morfológico no próximo capítulo.

### 5.1 Conexão de Galois

As definições de dilatações e de erosões são *duais*, no sentido que, se trocarmos a relação “está contido” ( $\subset$ ) pela relação “contem” ( $\supset$ ), os operadores que eram dilatações passam a ser erosões e os operadores que eram erosões passam a ser dilatações. Por isto, poderíamos pensar que existe uma relação um por um entre as dilatações e as erosões. É isto que nós vamos estudar nesta seção. A noção chave para levar adiante este propósito é a de *conexão de Galois* [Birkho67].

**Definição 5.1** (conexão de Galois) – Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . O par  $(\alpha, \beta)$  é uma *conexão de Galois* entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$  se e somente se os três axiomas abaixo são satisfeitos,

$$X_1 \supset X_2 \Rightarrow \alpha(X_2) \subset \alpha(X_1) \quad (X_1, X_2 \in \mathcal{P}) \quad (\text{isotonia de } \alpha)$$

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow \beta(Y_2) \supset \beta(Y_1) \quad (Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}) \quad (\text{isotonia de } \beta)$$

$$X \supset \beta\alpha(X) \quad \text{e} \quad Y \subset \alpha\beta(Y) \quad (X, Y \in \mathcal{P}).$$

(anti-extensividade de  $\beta\alpha$  e extensividade de  $\alpha\beta$ )

□

**Proposição 5.1** (definição equivalente de conexão de Galois) – Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . O par  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$  se e somente se

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}). \quad \square$$

**Prova** – Por um lado, supondo que  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois, para todo  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} X \supset \beta(Y) &\Rightarrow \alpha(X) \supset \alpha(\beta(Y)) && \text{(isotonia de } \alpha) \\ &\Leftrightarrow \alpha(X) \supset \alpha\beta(Y) && \text{(definição do composto)} \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta(Y) \subset \alpha(X) && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \supset) \\ &\Rightarrow Y \subset \alpha(X), && \text{(extensividade de } \alpha\beta \text{ e transitividade de } \subset) \end{aligned}$$

da mesma maneira,

$$\begin{aligned} Y \subset \alpha(X) &\Rightarrow \beta(Y) \subset \beta(\alpha(X)) && \text{(isotonia de } \beta) \\ &\Leftrightarrow \beta(Y) \subset \beta\alpha(X) && \text{(definição do composto)} \\ &\Leftrightarrow \beta\alpha(X) \supset \beta(Y) && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \supset) \\ &\Rightarrow X \supset \beta(Y). && \text{(anti-extensividade de } \beta\alpha \text{ e transitividade de } \supset) \end{aligned}$$

Em outros termos, se  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois, então

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}).$$

Por outro lado, supondo que  $(\alpha, \beta)$  verifica a equivalência

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

para todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} Y = \alpha(X) &\Rightarrow X \supset \beta(\alpha(X)) && \text{(implicação } \Leftarrow) \\ &\Leftrightarrow X \supset \beta\alpha(X), && \text{(definição de composto)} \end{aligned}$$

isto é,  $\beta\alpha$  é anti-extensiva. Da mesma maneira, para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} X = \beta(Y) &\Rightarrow Y \subset \alpha(\beta(Y)) && \text{(implicação } \Rightarrow) \\ &\Leftrightarrow Y \subset \alpha\beta(Y), && \text{(definição de composto)} \end{aligned}$$

isto é,  $\alpha\beta$  é extensiva. Finalmente, para todo  $X_1$  e  $X_2$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} X_1 \supset X_2 &\Rightarrow X_1 \supset \beta\alpha(X_2) && \text{(anti-extensividade de } \beta\alpha \text{ e transitividade de } \supset) \\ &\Leftrightarrow X_1 \supset \beta(\alpha(X_2)) && \text{(definição de composto)} \\ &\Rightarrow \alpha(X_2) \subset \alpha(X_1), && \text{(} Y = \alpha(X_2) \text{ e implicação } \Rightarrow) \end{aligned}$$

isto é,  $\alpha$  é isotônica. Da mesma maneira, para todo  $Y_1$  e  $Y_2$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} Y_1 \subset Y_2 &\Rightarrow Y_1 \subset \alpha\beta(Y_2) && \text{(extensividade de } \beta\alpha \text{ e transitividade de } \subset) \\ &\Leftrightarrow Y_1 \subset \alpha(\beta(Y_2)) && \text{(definição de composto)} \\ &\Rightarrow \beta(Y_2) \supset \beta(Y_1), && \text{(} X = \beta(Y_2) \text{ e implicação } \Leftarrow) \end{aligned}$$

isto é,  $\beta$  é isotônica.

Em outros termos, se  $(\alpha, \beta)$  verifica a equivalência

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

então  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois. □

A Figura 14.1 ilustra uma conexão de Galois  $(\alpha, \beta)$ . Um caso particular de conexão de Galois é quando

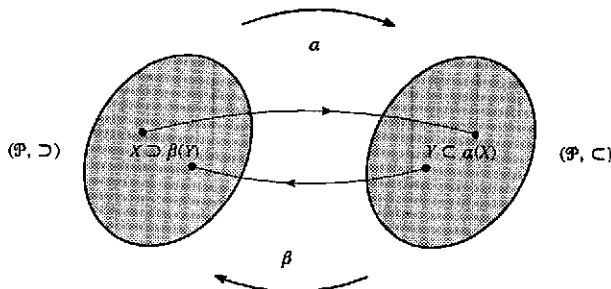


Fig. 5.1 – Conexão de Galois.

o par  $(\alpha, \beta)$  verifica a equivalência abaixo,

$$X = \beta(Y) \Leftrightarrow Y = \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

então  $\alpha\beta = \iota$  e  $\beta\alpha = \iota$ , isto é,  $\alpha$  e  $\beta$  são bijeções recíprocas.

**Exercício 5.1** (exemplos de conexão de Galois) – Seja  $E$  um grupo Abeliano. Mostre que os pares  $(\tau_u, \tau - u)$ , para todo  $u$  em  $E$ , e o par  $(\tau, \tau)$  são conexões de Galois entre  $(\mathcal{P}(E), \supset)$  e  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ .  $\square$

Vamos caracterizar mutuamente os elementos de uma conexão de Galois. Daqui para frente, os limitantes superiores, inferiores, os supremos e os ínfimos serão sempre relativos ao conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ . Para todos operadores  $\alpha$  e  $\beta$  sobre  $\mathcal{P}$ , sejam  $\underline{\alpha}$  e  $\underline{\beta}$  os operadores sobre  $\mathcal{P}$  dados por

$$\underline{\beta}(X) = \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \beta(Y)\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\underline{\alpha}(Y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \alpha(X)\} \quad (Y \in \mathcal{P}).$$

**Proposição 5.2** (caracterização mútua dos elementos de uma conexão de Galois) – Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . Se o par  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ , então

$$\alpha = \underline{\beta} \quad \text{e} \quad \beta = \underline{\alpha}. \quad \square$$

**Prova** – Pela Proposição 14.1, para todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \beta(Y)\} = \{Y \in \mathcal{P} : Y \subset \alpha(X)\},$$

isto é,  $\alpha(X)$  é o maior elemento de  $\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \beta(Y)\}$ , em outros termos,  $\alpha(X)$  é o supremo desta coleção. Assim, por definição de  $\underline{\beta}$ , para todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\alpha(X) = \underline{\beta}(X).$$

A prova da segunda igualdade decorre da primeira igualdade por dualidade.  $\square$

A conexão de Galois é importante em Morfologia Matemática por causa da próxima proposição.

**Proposição 5.3** (propriedade de uma conexão de Galois) – Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . Se o par  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$  então

$$\beta \in \Delta \quad \text{e} \quad \alpha \in E. \quad \square$$

**Prova** – De um lado, para todo  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$  ( $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ ) e  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 X \supset \sup\beta(\mathcal{Y}) &\Leftrightarrow \sup\beta(\mathcal{Y}) \subset X && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \sup) \\
 &\Leftrightarrow X \text{ é l.s. de } \beta(\mathcal{Y}) && \text{(definição de supremo)} \\
 &\Leftrightarrow \beta(Y) \subset X \ (Y \in \mathcal{Y}) && \text{(definição de l.s.)} \\
 &\Leftrightarrow X \supset \beta(Y) \ (Y \in \mathcal{Y}) && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \sup) \\
 &\Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \ (Y \in \mathcal{Y}) && \text{(Proposição 14.1)} \\
 &\Leftrightarrow \alpha(X) \text{ é l.s. de } \mathcal{Y} && \text{(definição de l.s.)} \\
 &\Leftrightarrow \sup\mathcal{Y} \subset \alpha(X) && \text{(definição de supremo)} \\
 &\Leftrightarrow X \supset \beta(\sup\mathcal{Y}), && \text{(Proposição 14.1)}
 \end{aligned}$$

isto é,  $X \supset \sup\beta(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow X \supset \beta(\sup\mathcal{Y})$ . Fazendo, sucessivamente,  $X = \beta(\sup\mathcal{Y})$  e  $X = \sup\beta(\mathcal{Y})$ , obtemos, por anti-simetria da relação  $\supset$ , para todo  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$  ( $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ ),

$$\beta(\sup\mathcal{Y}) = \sup\beta(\mathcal{Y}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \emptyset \subset \alpha(\emptyset) &\Leftrightarrow \emptyset \supset \beta(\emptyset) && \text{(Proposição 14.1)} \\
 &\Rightarrow \beta(\emptyset) = \emptyset. && \text{(\emptyset é o menor elemento de } \mathcal{P})
 \end{aligned}$$

Isto é, desde que  $(\emptyset \subset \alpha(\emptyset))$  é sempre verdade,  $\beta(\emptyset) = \emptyset$ . Assim,  $\beta(\sup\mathcal{Y}) = \sup\beta(\mathcal{Y})$  mesmo para  $\mathcal{Y} = \emptyset$ .

Em outros termos,  $\beta \in \Delta$ .

A prova que  $\alpha \in \mathbf{E}$  decorre de  $\beta \in \Delta$  por dualidade.  $\square$

Com os resultados acima, relativos à conexão de Galois, podemos enunciar a seguinte proposição, própria as conexões de Galois entre reticulados completos.

**Proposição 5.4** (definições equivalentes de uma conexão de Galois) – Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . As três proposições abaixo são equivalentes:

(1)  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \sup)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ ;

(2)  $\alpha \in \mathbf{E}$  e  $\beta = \underline{\alpha}$ ;

(3)  $\beta \in \Delta$  e  $\alpha = \overline{\beta}$ .  $\square$

**Prova** – Vamos provar que (1) implica (2). Pela Proposição 14.3,  $\alpha \in \mathbf{E}$  e pela Proposição 14.2,  $\beta = \underline{\alpha}$ .

Vamos provar que (2) implica (1). Pela Proposição 3.1,  $\alpha$  é isotônico. Seja  $Y \in \mathcal{P}$ , e seja  $\mathfrak{S}_Y = \{U \in \mathcal{P} : Y \subset \alpha(U)\}$ , então

$$\begin{aligned}
 Y_1 \subset Y_2 &\Rightarrow (Y_2 \subset \alpha(U) \Rightarrow Y_1 \subset \alpha(U)) \ (U \in \mathcal{P}) && \text{(transitividade de } \subset) \\
 &\Leftrightarrow \mathfrak{S}_{Y_2} \subset \mathfrak{S}_{Y_1} && \text{(definição de } \mathfrak{S}_Y) \\
 &\Rightarrow \inf\mathfrak{S}_{Y_1} \subset \inf\mathfrak{S}_{Y_2} && \text{(propriedade do ínfimo)} \\
 &\Leftrightarrow \underline{\alpha}(Y_1) \subset \underline{\alpha}(Y_2), && \text{(definições de } \underline{\alpha} \text{ e } \mathfrak{S}_Y) \\
 &\Leftrightarrow \beta(Y_1) \subset \beta(Y_2), && \text{(\beta = } \underline{\alpha})
 \end{aligned}$$

isto é,  $\beta$  é também isotônica.



Para todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{F}_{\alpha(X)} &\Rightarrow X \supset \inf \mathfrak{F}_{\alpha(X)} && \text{(ínfimo é l.i.)} \\ &\Leftrightarrow X \supset \underline{\alpha}(X) && \text{(definições de } \underline{\alpha} \text{ e } \mathfrak{F}_Y) \\ &\Leftrightarrow X \supset \beta(\alpha(X)) && (\beta = \underline{\alpha}) \\ &\Leftrightarrow X \supset \beta\alpha(X), && \text{(definição de composto)} \end{aligned}$$

isto é, desde que  $(X \in \mathfrak{F}_{\alpha(X)})$  é sempre verdade,  $\beta\alpha$  é anti-extensivo.

Para todo  $Y \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathfrak{F}_Y) &= \{V \in \mathcal{P} : \exists X \in \mathfrak{F}_Y, V = \alpha(X)\} && \text{(definição de imagem)} \\ &= \{V \in \mathcal{P} : \exists X \in \mathcal{P}, Y \subset \alpha(X) \text{ e } V = \alpha(X)\} && \text{(definição de } \mathfrak{F}_Y) \\ &= \{V \in \mathcal{P} : Y \subset V\}, && \text{(dedução lógica)} \end{aligned}$$

em outros termos,  $Y$  é l.i. de  $\alpha(\mathfrak{F}_Y)$ . Para todo  $Y \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} Y \text{ é l.i. de } \alpha(\mathfrak{F}_Y) &\Leftrightarrow Y \subset \inf \alpha(\mathfrak{F}_Y) && \text{(definição de ínfimo)} \\ &\Leftrightarrow Y \subset \alpha(\inf \mathfrak{F}_Y) && (\alpha \text{ é erosão}) \\ &\Leftrightarrow Y \subset \alpha(\underline{\alpha}(Y)) && \text{(definições de } \underline{\alpha} \text{ e } \mathfrak{F}_Y) \\ &\Leftrightarrow Y \subset \alpha(\beta(Y)) && (\beta = \underline{\alpha}) \\ &\Leftrightarrow Y \subset \alpha\beta(Y), && \text{(definição de composto)} \end{aligned}$$

isto é, desde que  $(Y \text{ é l.i. de } \alpha(\mathfrak{F}_Y))$  é sempre verdade,  $\alpha\beta$  é extensivo.

Em outros termos, pela Definição 14.1  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois.

A prova que (1) e (3) são equivalentes decorre da equivalência entre (1) e (2) por dualidade.  $\square$

A partir da proposição acima, podemos enunciar o seguinte resultado que relaciona dilatações e erosões.

**Proposição 5.5** (dual isomorfismo entre as dilatações e as erosões) – O mapeamento do reticulado completo  $\mathbf{E}$  das erosões sobre  $\mathcal{P}$ , no reticulado completo  $\Delta$  das dilatações sobre  $\mathcal{P}$ ,

$$\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$$

é um dual isomorfismo. Isto é,  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  é uma bijeção e para todo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $\mathbf{E}$ ,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow \underline{\varepsilon}_2 \leq \underline{\varepsilon}_1, \quad \text{(antitonia dupla)}$$

O inverso de  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  é o mapeamento

$$\delta \mapsto \bar{\delta}.$$

O gráfico de  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  é o conjunto de todas as conexões de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ .  $\square$

**Prova** – A equivalência entre (1) e (2) da Proposição 14.4 mostra que o gráfico de  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  é o conjunto de todas as conexões de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ . A equivalência entre (2) e (3) mostra que o mapeamento  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  é uma bijeção e seu inverso é  $\delta \mapsto \bar{\delta}$ , desde que  $\varepsilon = \overline{(\underline{\varepsilon})}$  e  $\delta = \underline{(\bar{\delta})}$ .

Vamos provar a antitonia dupla de  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$ . Para todo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $E$ ,

- $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1(X) \subset \varepsilon_2(X) \quad (X \in \mathcal{P})$  (definição de  $\leq$ )
- $\Leftrightarrow (Y \subset \varepsilon_1(X) \Rightarrow Y \subset \varepsilon_2(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}))$  (transitividade de  $\subset$ )
- $\Leftrightarrow X \supset \underline{\varepsilon_1}(Y) \Rightarrow X \supset \underline{\varepsilon_2}(Y) \quad (X, Y \in \mathcal{P})$  (Proposições 14.1 e 14.4)
- $\Leftrightarrow \underline{\varepsilon_1}(Y) \supset \underline{\varepsilon_2}(Y) \quad (Y \in \mathcal{P})$  (transitividade de  $\supset$ )
- $\Leftrightarrow \underline{\varepsilon_2}(Y) \subset \underline{\varepsilon_1}(Y) \quad (Y \in \mathcal{P})$  (dualidade de  $\subset$  e  $\supset$ )
- $\Leftrightarrow \underline{\varepsilon_2} \leq \underline{\varepsilon_1}$ . (definição de  $\leq$ )

□

A Proposição 14.5 mostra que existe uma correspondência um por um entre  $\Delta$  e  $E$ . A Figura 14.2 ilustra este resultado.

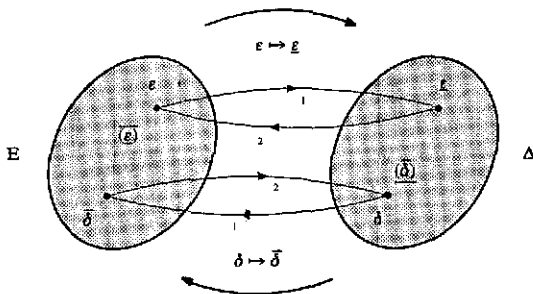


Fig. 5.2 – Bijeção entre as erosões e as dilatações.

A bijeção entre as dilatações e as erosões permite caracterizar as erosões simplesmente a partir da caracterização das dilatações, feita no Capítulo 3.

**Proposição 5.6** (caracterização das erosões) – O mapeamento de  $E$  em  $\mathcal{P}^E$ ,

$$\varepsilon \mapsto a_\varepsilon,$$

onde  $a_\varepsilon$  é a função dada por

$$a_\varepsilon(y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : y \in \varepsilon(X)\} \quad (y \in E)$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$a \mapsto \varepsilon_a,$$

onde  $\varepsilon_a$  é a erosão dada por

$$\varepsilon_a(X) = \{y \in E : X \supset a(y)\} \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Para todo  $\varepsilon \in E$ ,  $a_\varepsilon = a_{\underline{\varepsilon}}$  e para todo  $a \in \mathcal{P}^E$ ,  $\varepsilon_a = \overline{\delta_a}$ . □

**Prova** – Vamos provar que o mapeamento  $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon$  é a composição da bijeção  $\delta \mapsto a_\delta$  (Proposição 3.5) pela bijeção  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  (Proposição 14.5). Para todo  $\varepsilon \in E$  e  $y \in E$ ,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(y) &= \underline{\varepsilon}(\{y\}) && \text{(definição } a_\delta) \\ &= \inf\{X \in \mathcal{P} : \{y\} \subset \varepsilon(X)\} && \text{(definição } \underline{\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \inf\{X \in \mathcal{P} : y \in \varepsilon(X)\} && \text{(definição de singleton)} \\
 &= a_\varepsilon(y). && \text{(definição de } a_\varepsilon)
 \end{aligned}$$

Isto é, para todo  $\varepsilon \in E$ ,  $a_\varepsilon = a_{\underline{\varepsilon}}$ . Por ser a composição de duas bijeção,  $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon$  é uma bijeção.

Vamos provar que o mapeamento  $a \mapsto \varepsilon_a$  é a composição de  $\delta \mapsto \bar{\delta}$  (Proposição 14.5) por  $a \mapsto \delta_a$  (Proposição 3.5). Para todo  $a \in \mathcal{P}^E$  e  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}_a(X) &= \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \delta_a(Y)\} && \text{(definição de } \bar{\delta}) \\
 &= \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \bigcup_{y \in Y} a(y)\} && \text{(definição de } \delta_a) \\
 &= \bigcup_{X \supset \bigcup_{y \in Y} a(y)} Y && \text{(propriedade da união)} \\
 &= \{y \in E : \exists Y \in \mathcal{P}, (X \supset \bigcup_{y' \in Y} a(y')) \text{ e } y \in Y\} && \text{(definição da união)} \\
 &= \{y \in E : \exists Y \in \mathcal{P}, (X \supset a(y')) \text{ (} y' \in Y) \text{ e } y \in Y\} && \text{(propriedade da união)} \\
 &= \{y \in E : X \supset a(y)\} && \text{(dedução lógica)} \\
 &= \varepsilon_a(X). && \text{(definição de } \varepsilon_a)
 \end{aligned}$$

Isto é, para todo  $a \in \mathcal{P}^E$ ,  $\varepsilon_a = \bar{\delta}_a$ . Por ser a composição do inverso de  $\varepsilon \mapsto \underline{\varepsilon}$  pelo inverso de  $\delta \mapsto a_\delta$ ,  $a \mapsto \varepsilon_a$  é o inverso de  $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon$ .  $\square$

A Proposição 14.6 mostra que existe uma correspondência um por um entre  $E$  e  $\mathcal{P}^E$ . As funções a valores nas partes de  $E$  caracterizam sem ambigüidade as erosões. A Figura 14.3 ilustra este resultado e mostra como ele é obtido. A função  $a_\varepsilon$  é chamada de *função estruturante da erosão*  $\varepsilon$ .

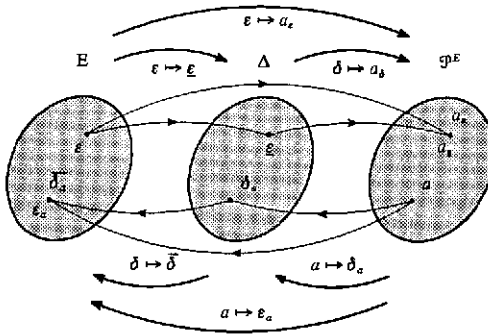


Fig. 5.3 – Bijeção entre as erosões e as funções estruturantes.

A Figura 14.4 mostra quatro modos de representar uma erosão por um bloquinho. Em (a) e (d), fazemos uma referência explícita a erosão. Em (b) e (c), a erosão é caracterizada pela sua função estruturante. Como já indicado no Capítulo 3, para um dado subconjunto  $X$ , o subconjunto  $\varepsilon_a(X)$  chama-se *erosão de  $X$  pela função estruturante  $a$* .

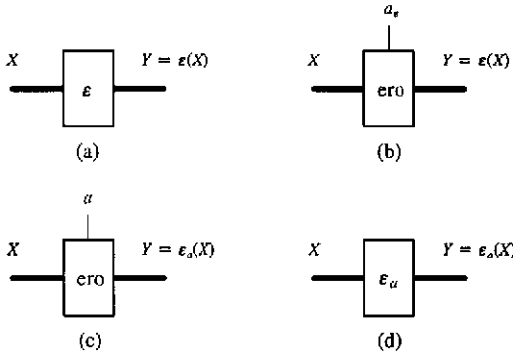


Fig. 5.4 – Quatro modos de representar uma erosão.

A bijeção apresentada na Proposição 14.6 inverte as relações de ordem definidas sobre  $\mathbf{E}$  e  $\mathcal{P}^E$ , como enunciado na próxima proposição.

**Proposição 5.7** (dual isomorfismo de reticulados) – O mapeamento do reticulado  $\mathbf{E}$  das erosões no reticulado das funções de  $E$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon$ , é um dual isomorfismo de reticulado, isto é,  $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon$  é uma bijeção e para todo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $\mathbf{E}$ ,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_{\varepsilon_2} \leq a_{\varepsilon_1}. \quad (\text{antitonia dupla}) \quad \square$$

**Prova** – Pela Proposição 14.6,  $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon$  é uma bijeção. Para todo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $\mathbf{E}$ ,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow \underline{\varepsilon_2} \leq \underline{\varepsilon_1} \quad (\text{Proposição 14.5})$$

$$\Leftrightarrow a_{\underline{\varepsilon_2}} \leq a_{\underline{\varepsilon_1}} \quad (\text{Proposição 3.11})$$

$$\Leftrightarrow a_{\varepsilon_2} \leq a_{\varepsilon_1}. \quad (\text{Proposição 14.6}) \quad \square$$

Como já foi indicado no Capítulo 3, o conjunto das erosões, provido da relação de ordem  $\leq$ , é um *reticulado completo*. Em particular, no caso das erosões, para todo  $\Psi \subset \mathbf{E}$ , temos

$$\sup_{\mathcal{P}^E} \Psi \leq \sup_{\mathbf{E}} \Psi \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbf{E}} \Psi = \inf_{\mathcal{P}^E} \Psi.$$

**Proposição 5.8** (propriedade da união e interseção de erosões) – Seja  $(\varepsilon_i)_{i \in I}$  uma família de erosões sobre  $\mathcal{P}$  e seja  $(\alpha_i)_{i \in I}$  a família das respectivas funções estruturantes, isto é,  $\alpha_i = \alpha_{\varepsilon_i}$  para todo  $i \in I$ . Então

$$\bigwedge_{i \in I} \varepsilon_i = \varepsilon_{\bigvee_{i \in I} \alpha_i},$$

$$\bigvee_{i \in I} \varepsilon_i \leq \varepsilon_{\bigwedge_{i \in I} \alpha_i}. \quad \square$$

**Prova** – A prova é similar a da Proposição 3.12. □

Em particular, a interseção de duas erosões coincide com a erosão que tem como função estruturante a união das funções estruturantes. A união de duas erosões é menor que a erosão que tem como função estruturante a interseção das funções estruturantes. Em outros termos,

$$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \varepsilon_{\alpha_1 \vee \alpha_2} \quad \text{e} \quad \varepsilon_1 \vee \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{\alpha_1 \wedge \alpha_2}$$

Pelas Proposições 3.5, 14.4 e 14.6, para todo  $a \in \mathcal{P}^E$ , o par  $(\varepsilon_a, \delta_a)$  é uma conexão de Galois. Então, pela Proposição 14.1, para todo  $a \in \mathcal{P}^E$ ,

$$X \supset \delta_a(Y) \Leftrightarrow Y \subset \varepsilon_a(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

e pela Proposição 14.2,

$$\varepsilon_a(X) = \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \delta_a(Y)\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\delta_a(Y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \varepsilon_a(X)\} \quad (Y \in \mathcal{P}).$$

De uma maneira similar ao caso geral, podemos caracterizar as erosões invariantes por translação.

**Proposição 5.9** (conexão de Galois invariante por translação) – Seja  $\Delta'$  o conjunto das dilatações invariantes por translação sobre  $\mathcal{P}$  e seja  $E'$  o das erosões invariantes por translação sobre  $\mathcal{P}$ . Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathcal{P}$ . Se o par  $(\alpha, \beta)$  é uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ , então

$$(1) \alpha \in E' \Rightarrow \beta \in \Delta'$$

$$(2) \beta \in \Delta' \Rightarrow \alpha \in E'. \quad \square$$

**Prova** – Para provar (1), basta, pela Proposição 14.4, mostrar que se  $\varepsilon$  é i.t., então  $\underline{\varepsilon}$  é também i.t.. Para todo  $\alpha \in E'$ ,  $Y$  em  $\mathcal{P}$  e  $u$  em  $E$ ,

$$\underline{\varepsilon}(Y + u) = \inf\{X \in \mathcal{P} : Y + u \subset \varepsilon(X)\} \quad (\text{definição de } \underline{\varepsilon})$$

$$= \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \varepsilon(X) - u\} \quad (\text{propriedade do traslado})$$

$$= \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \varepsilon(X - u)\} \quad (\varepsilon \text{ é i.t.})$$

$$= (\inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \varepsilon(X)\}) + u \quad (\text{propriedade do traslado})$$

$$= \underline{\varepsilon}(Y) + u \quad (\text{definição de } \underline{\varepsilon})$$

Isto é,  $\underline{\varepsilon}$  é também i.t. A prova de (2) é similar. □

**Proposição 5.10** (caracterização das erosões i.t.) – Seja  $E'$  o conjunto das erosões invariantes por translação. O mapeamento de  $E'$  em  $\mathcal{P}^E$ ,

$$\varepsilon \mapsto B_\varepsilon,$$

onde  $B_\varepsilon$  é o subconjunto dado por

$$B_\varepsilon = \inf\{X \in \mathcal{P} : o \in \varepsilon(X)\}$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$B \mapsto \varepsilon_B.$$

onde  $\varepsilon_B$  é a erosão invariante por translação, dada por

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Para todo  $\varepsilon \in \mathbf{E}'$ ,  $B_\varepsilon = B_\varepsilon$  e para todo  $B \in \mathcal{P}$ ,  $\varepsilon_B = \overline{\delta_B}$ . □

**Prova** – A prova é similar a da Proposição 14.6. Precisamos apenas verificar que se  $\varepsilon$  é i.t., então  $\underline{\varepsilon}$  é também i.t.. Isto decorre das Proposições 14.2 e 14.9. □

Pelas Proposições 14.4 e 14.10, para todo  $B \in \mathcal{P}$ , o par  $(\varepsilon_B, \delta_B)$  é uma conexão de Galois. Então, pela Proposição 14.1, para todo  $B \in \mathcal{P}$ ,

$$X \supset \delta_B(Y) \Leftrightarrow Y \subset \varepsilon_B(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}).$$

A Figura 14.5 ilustra a implicação  $\Leftarrow$  e a Figura 14.6 a implicação  $\Rightarrow$ .

Pela Proposição 14.2., para todo  $B \in \mathcal{P}$ ,

$$\varepsilon_B(X) = \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \delta_B(Y)\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\delta_B(Y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \varepsilon_B(X)\} \quad (Y \in \mathcal{P}).$$

**Exercício 5.2** (Conexão de Galois) – Seja  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  e seja  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Determine  $\delta_B \varepsilon_B(X)$ . Verifique que  $\delta_B \varepsilon_B(X) \subset X$ . Dê uma razão para isto ocorrer. □

A noção de conexão de Galois, apresentada nesta seção, permitiu definir uma primeira dualidade entre as dilatações e as erosões, que será muito útil para introduzir as aberturas e fechamentos morfológicos, no próximo capítulo. Na próxima seção, vamos introduzir uma segunda dualidade.

## 5.2 Dualidade por complementação.

Vamos agora definir as noções de operador dual por complementação e de transposto de uma função estruturante.

**Definição 5.2** (dualidade por complementação) – Seja  $\psi$  um operador sobre  $\mathcal{P}$ . O *dual* (por complementação) de  $\psi$  é o operador sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\psi^*$  e dado por

$$\psi^*(X) = \psi(X^c)^c \quad (X \in \mathcal{P}). \quad \square$$

Dois operadores  $\alpha$  e  $\beta$  sobre  $\mathcal{P}$  são *mutuamente duais por complementação* se e somente se as propriedades equivalentes abaixo são satisfeitas

$$(1) \quad x \in \beta(X^c) \Leftrightarrow x \in \alpha(X)^c \quad (x \in E, X \in \mathcal{P})$$

$$(2) \quad \alpha = \beta^*$$

$$(3) \quad \beta = \alpha^*.$$

**Exercício 5.3** (operadores mutuamente duais) – Prove a equivalência entre as três propriedades acima. □

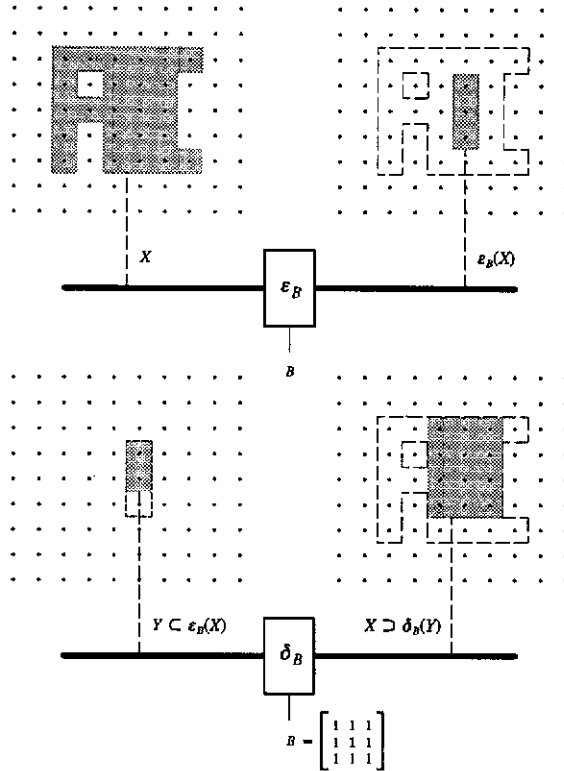


Fig. 5.5 – Propriedade de uma conexão de Galois (começando pela erosão).

**Prova** – Vamos provar que (1) implica (2). Para todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 \alpha(X) &= ((\alpha(X))^c)^c && \text{(idempotência da complementação)} \\
 &= \{x \in E : x \in \beta(X^c)\}^c && \text{(Hipótese (1))} \\
 &= \{x \in E : x \notin \beta(X^c)\} && \text{(definição de complemento)} \\
 &= \{x \in E : x \in \beta(X^c)^c\} && \text{(definição de complemento)} \\
 &= \beta(X^c)^c && \text{(dedução lógica)} \\
 &= \beta^*(X). && \text{(definição de operador dual)}
 \end{aligned}$$

Isto é, sob a Hipótese (1),  $\alpha = \beta^*$ .

Vamos provar que (2) implica (3). Para todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha^*(X) &= (\beta^*)^*(X) && \text{(Hipótese (2))} \\ &= \beta^*(X^c) && \text{(definição de operador dual)} \\ &= (\beta((X^c)^c))^c && \text{(definição de operador dual)} \\ &= \beta(X). && \text{(idempotência da complementação)} \end{aligned}$$

Isto é, sob a Hipótese (2),  $\beta = \alpha^*$ .

Vamos provar que (3) implica (1). Para todo  $X \in \mathcal{P}$  e  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in \beta(X^c) &\Leftrightarrow x \in \alpha^*(X^c) && \text{(Hipótese (3))} \\ &\Leftrightarrow x \in \alpha((X^c)^c) && \text{(definição de operador dual)} \\ &\Leftrightarrow x \in \alpha(X)^c. && \text{(idempotência da complementação)} \end{aligned}$$

Isto é, sob a Hipótese (3),  $x \in \beta(X^c) \Leftrightarrow x \in \alpha(X)^c$  ( $x \in E, X \in \mathcal{P}$ ).  $\square$

Pelas duas últimas equivalências acima, o mapeamento  $\psi \mapsto \psi^*$  de  $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$  em  $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$  é uma bijeção e ele é seu próprio inverso. No caso das restrições à  $\Delta$  e  $E$  podemos evidenciar um outro dual isomorfismo entre as dilatações e as erosões.

**Proposição 5.11** (dual isomorfismo entre as dilatações e as erosões) – O mapeamento do reticulado completo  $E$  das erosões sobre  $\mathcal{P}$ , no reticulado completo  $\Delta$  das dilatações sobre  $\mathcal{P}$

$$\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$$

é um dual isomorfismo. Isto é,  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$  é uma bijeção e para todo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $E$ ,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_1^*. \quad \text{(antitonia)}$$

O inverso de  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$  é o mapeamento

$$\delta \mapsto \delta^*.$$

O gráfico de  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$  é o conjunto de todos pares de erosão–dilatação mutuamente duais por complementação.  $\square$

**Prova** – Temos que provar que se  $\varepsilon \in E$  então  $\varepsilon^* \in \Delta$ . Para todo  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ , seja

$$\mathcal{Y}' = \{X \in \mathcal{P} : X^c \in \mathcal{Y}\}.$$

Para todo  $\varepsilon \in E$  e  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon^*\left(\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y\right) &= \left(\varepsilon\left(\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y^c\right)\right)^c && \text{(definição de dual por complementação)} \\ &= \left(\varepsilon\left(\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y^c\right)\right)^c && \text{(lei de Morgan generalizada)} \\ &= \left(\varepsilon\left(\bigcap_{X \in \mathcal{Y}'} X\right)\right)^c && \text{(definição de } \mathcal{Y}'\text{)} \\ &= \left(\bigcap_{X \in \mathcal{Y}'} \varepsilon(X)\right)^c && \text{(definição de erosão)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \bigcap_{Y \in \mathfrak{q}} \varepsilon(Y^c) \right)^c && \text{(definição de } \mathfrak{q}' \text{)} \\
&= \bigcup_{Y \in \mathfrak{q}} (\varepsilon(Y^c))^c && \text{(lei de Morgan generalizada)} \\
&= \bigcup_{Y \in \mathfrak{q}} \varepsilon^*(Y). && \text{(definição de dual por complementação)}
\end{aligned}$$

Isto é,  $\varepsilon^*$  é uma dilatação.

Da mesma maneira, podemos provar que se  $\delta \in \Delta$  então  $\delta^* \in E$ .

Como  $\varepsilon = (\varepsilon^*)^*$  e  $\delta = (\delta^*)^*$ ,  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$  é uma bijeção e seu inverso é  $\delta \mapsto \delta^*$ .

Vamos provar a antitonia de  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$ . Para todo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $E$ ,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 &\Leftrightarrow \varepsilon_1(X) \subset \varepsilon_2(X) \quad (X \in \mathfrak{P}) && \text{(definição de } \leq \text{)} \\
&\Leftrightarrow \varepsilon_1(Y^c) \subset \varepsilon_2(Y^c) \quad (Y \in \mathfrak{P}) && \text{(a complementação é uma bijeção)} \\
&\Leftrightarrow (\varepsilon_2(Y^c))^c \subset (\varepsilon_1(Y^c))^c \quad (Y \in \mathfrak{P}) && \text{(antitonia da complementação)} \\
&\Leftrightarrow \varepsilon_2^*(Y) \subset \varepsilon_1^*(Y) \quad (Y \in \mathfrak{P}) && \text{(definição de dual por complementação)} \\
&\Leftrightarrow \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_1^*. && \text{(definição de } \leq \text{)}
\end{aligned}$$

Finalmente, para todo  $\varepsilon \in E$ , o par  $(\varepsilon, \varepsilon^*)$  é formado por uma erosão e por uma dilatação, que são mutuamente duais por complementação. Inversamente, em todo par  $(\varepsilon, \delta)$ , formado por uma erosão e por uma dilatação mutuamente duais por complementação,  $\delta$  é o dual (por complementação) de  $\varepsilon$ , isto é,  $(\varepsilon, \delta)$  pertence ao gráfico de  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$ . Em outros termos, o gráfico de  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$  é o conjunto de todos pares de erosão-dilatação mutuamente duais por complementação.  $\square$

A Proposição 14.11 é uma outra maneira de mostrar que existe uma correspondência um por um entre  $\Delta$  e  $E$ . A Figura 14.7 ilustra este resultado.

**Definição 5.3** (transposto de uma função estruturante) – Seja  $a$  uma função de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$ . O *transposto* de  $a$  é a função de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$ , denotado  $a^t$  e dada por

$$a^t(x) = \{y \in E : x \in a(y)\} \quad (x \in E). \quad \square$$

**Exercício 5.4** (definição equivalente de dilatação por uma função estruturante) – Seja  $\delta_a$  uma dilatação sobre  $\mathfrak{P}(E)$  de função estruturante  $a$ , prove que para todo  $Y \in \mathfrak{P}$

$$\delta_a(Y) = \{x \in E : a^t(x) \cap Y \neq \emptyset\}. \quad \square$$

Das funções  $a$  e  $b$  de  $E$  em  $\mathfrak{P}(E)$  são mutuamente transpostas se e somente se as proposições equivalentes abaixo são satisfeitas

$$\begin{aligned}
x \in a(y) &\Leftrightarrow y \in b(x) \quad (x, y \in E); \\
a &= b^t; \\
b &= a^t.
\end{aligned}$$

Pelas duas últimas equivalências acima, o mapeamento  $a \mapsto a^t$  de  $\mathfrak{P}^E$  em  $\mathfrak{P}^E$  é uma bijeção e ele é seu próprio inverso.

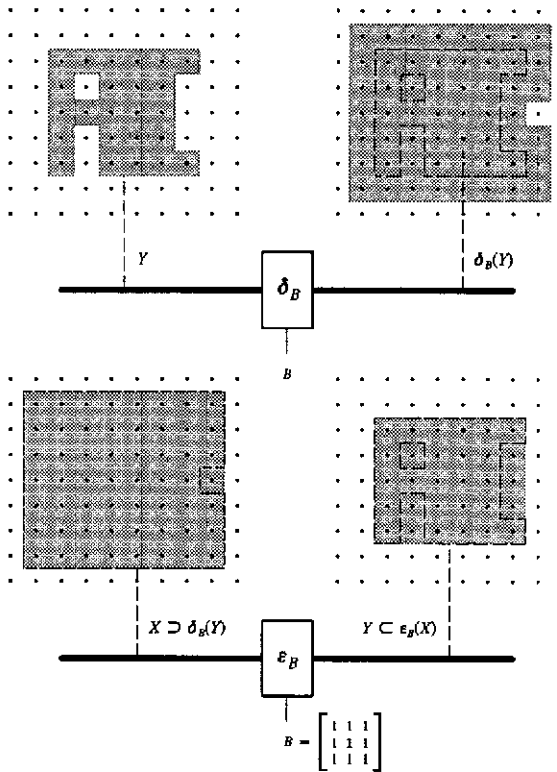


Fig. 5.6 – Propriedade de uma conexão de Galois (começando pela dilatação).

**Proposição 5.12** (transposição versus dualidade por complementação) – As proposições abaixo são equivalentes. Para todo  $a$  e  $b$  em  $\mathcal{P}^E$ ,

$a$  e  $b$  mutuamente transpostos  $\Leftrightarrow \delta_a$  e  $\varepsilon_b$  mutuamente duais por complementação;

$$\delta_a^* = \varepsilon_{a^t};$$

$$\varepsilon_b^* = \delta_{b^t};$$

□

**Prova** – Vamos provar a segunda proposição. Para todo  $a$  em  $\mathcal{P}^E$  e  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\delta_a^*(X) = (\delta_a(X^c))^c \quad (\text{definição de dual por complementação})$$

$$= (\{x \in E : a^t(x) \cap X^c \neq \emptyset\})^c \quad (\text{Exercício 14.4})$$

$$\begin{aligned}
 &= \{x \in E : a^l(x) \cap X^c = \emptyset\} && \text{(definição de complemento)} \\
 &= \{x \in E : a^l(x) \subset X\} && \text{(consistência entre } \cap \text{ e } \subset) \\
 &= \varepsilon_{a^l}(X). && \text{(definição de erosão por uma função estruturante)}
 \end{aligned}$$

Isto é,  $\delta_a^* = \varepsilon_{a^l}$ .

Em outros termos, a composição de  $\delta \mapsto \delta^*$  por  $a \mapsto \delta_a$ , isto é,  $a \mapsto \delta_a^*$  é idêntica a composição de  $b \mapsto \varepsilon_b$  por  $a \mapsto a^l$ , isto é,  $a \mapsto \varepsilon_{a^l}$ .

As outras proposições decorrem deste resultado usando o fato que os mapeamentos  $\delta \mapsto \delta^*$ ,  $a \mapsto \delta_a$ ,  $b \mapsto \varepsilon_b$ , e  $a \mapsto a^l$  são bijeções.  $\square$

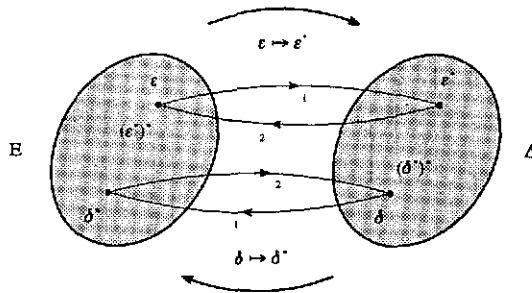


Fig. 5.7 – Bijeção entre as erosões e as dilatações através da dualidade por complementação.

A Figura 14.8 ilustra o resultado da Proposição 14.12 e mostra como ele é obtido.

Quando  $E$  é um grupo Abelian, dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $E$  são *mutuamente transpostos* se e somente se as proposições equivalentes abaixo são satisfeitas

- (1)  $x \in A + y \Leftrightarrow y \in B + x \quad (x, y \in E)$
- (2)  $A = B^l$
- (3)  $B = A^l$ .

**Exercício 5.5** (subconjuntos mutuamente transpostos) – Prove a equivalência entre as três propriedades acima.  $\square$

No caso invariante por translação temos resultados similares aos da Proposição 14.12. Por exemplo, as propriedades abaixo são equivalentes. Para todo  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$ ,

- (1)  $A$  e  $B$  mutuamente transpostos  $\Leftrightarrow \delta_A$  e  $\varepsilon_B$  mutuamente duais por complementação
- (2)  $\delta_A^* = \varepsilon_A$ ,
- (3)  $\varepsilon_B^* = \delta_B$ .

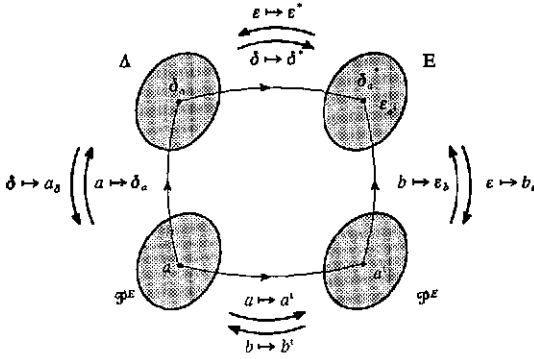


Fig. 5.8 – Transposição versus dualidade por complementação.

Quando  $A$  e  $B$  são simétricos, as duas igualdades acima simplificam-se e temos

$$\delta_A = \epsilon_A^* \text{ e } \epsilon_B = \delta_B^* .$$

As Figuras 14.9 e 14.10 ilustram estas igualdades no caso  $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

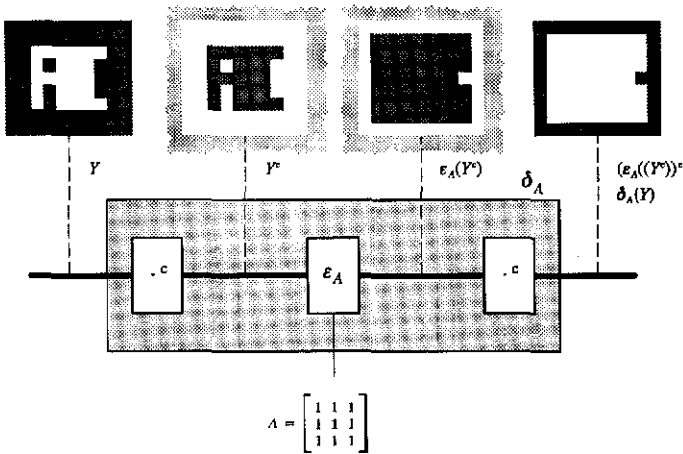


Fig. 5.9 – Dualidade por complementação (usando uma erosão).

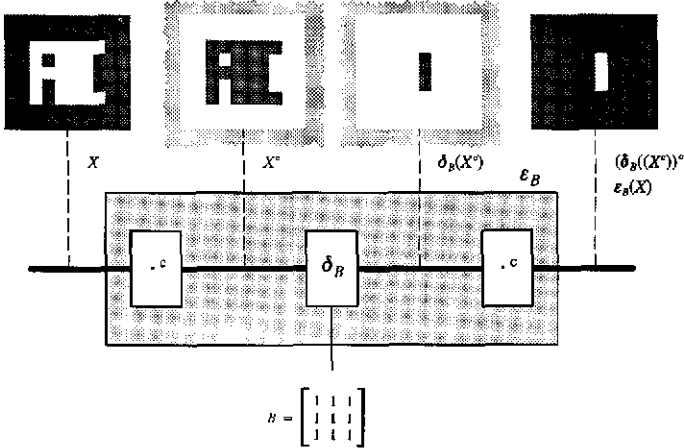


Fig. 5.10 – Dualidade por complementação (usando uma dilatação).



## Capítulo 6

### Aberturas e fechamentos

Neste capítulo vamos introduzir duas novas classes de operadores: a abertura e o fechamento, que ocupam um papel fundamental na área dos filtros morfológicos [Serra88]. Como já fizemos com os operadores elementares, adotaremos uma abordagem axiomática.

As noções de abertura e fechamento foram primeiramente introduzidas no âmbito da topologia. Dado um espaço topológico, a abertura (resp. fechamento) corresponde ao operador que produz o interior (resp. fecho) de um dado subconjunto.

Moore, em 1910, estendeu o conceito de fechamento ao reticulado completo  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  [Birkho67, p. 111]. As aberturas (resp. fechamentos) sobre reticulados completos são operadores que produzem os ínfimos (resp. supremos) de elementos de subconjuntos sup-fechados (resp. inf-fechados).

Em termos prático, interpretando uma imagem binária como sendo o “espaço disponível”, a abertura produz o “espaço útil” em relação a padrões que queremos colocar dentro do “espaço disponível”.

Primeiramente, apresentamos as aberturas e os fechamentos ditos algébricos. Em seguida, apresentamos o caso particular das aberturas e dos fechamentos morfológicos. As aberturas e os fechamentos algébricos são caracterizados por meio de subcoleções sup-fechadas de subconjuntos.

Finalmente, as aberturas e os fechamentos invariantes por translação, que receberam muita atenção nos primórdios da Morfologia Matemática [Mather75], serão estudados e o teorema de Matheron sobre a decomposição das aberturas algébricas (resp. fechamentos algébricos) em termos da união (resp. interseção) de aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) é apresentado.

#### 6.1 Aberturas e fechamentos algébricos

As aberturas e os fechamentos são casos particulares de filtros morfológicos. Seja  $\mathcal{P}(E)$ , ou simplesmente  $\mathcal{P}$ , a coleção de todos os subconjuntos de  $E$ . Os *filtros morfológicos* sobre  $\mathcal{P}$  são operadores (sobre  $\mathcal{P}$ ) isotônicos e idempotentes (de tipo 1).

**Definição 6.1** (abertura e fechamento) – Um filtro morfológico (sobre  $\mathcal{P}$ ) anti-extensivo é uma *abertura (algébrica)* (sobre  $\mathcal{P}$ ). Um filtro morfológico (sobre  $\mathcal{P}$ ) extensivo é um *fechamento (algébrico)* (sobre  $\mathcal{P}$ ).  $\square$

Uma abertura sobre  $\mathcal{P}$  é denotada genericamente por  $\gamma$  e um fechamento por  $\phi$ . O subconjunto das aberturas é denotado  $\Gamma$  e o dos fechamentos  $\Phi$ . Estes dois conjuntos de operadores têm as seguintes propriedades.

**Exercício 6.1** (propriedades das aberturas e dos fechamentos) – Prove que para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right) = \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right) \quad \text{e} \quad \phi\left(\bigcup_{X \in \mathfrak{S}} X\right) = \phi\left(\bigcup_{X \in \mathfrak{S}} \phi(X)\right). \quad \square$$

**Prova** – De um lado, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right) \subset \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X) \Rightarrow \gamma\left(\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right)\right) \subset \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right) \quad (\gamma \text{ é isotônico})$$

$$\Leftrightarrow \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right) \subset \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right), \quad (\gamma \text{ é idempotente})$$

isto é, desde que, pela isotonia  $\gamma$  e a Proposição 3.1,  $\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right) \subset \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)$ , temos

$\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right) \subset \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right)$ . De outro lado, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}$ ,

$$\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right) \subset \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X) \quad (\gamma \text{ é anti-extensivo})$$

$$\subset \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X, \quad (\gamma \text{ é anti-extensivo})$$

isto é, pela idempotência e a isotonia de  $\gamma$ ,  $\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right) \subset \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right)$ . Isto prova que, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}$ ,

temos  $\gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\right) = \gamma\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{S}} \gamma(X)\right)$ .

A prova da igualdade para os fechamentos é similar ou ainda decorre da igualdade para as aberturas por dualidade.  $\square$

**Proposição 6.1** (propriedades das aberturas e fechamentos) – O subconjunto das aberturas  $\Gamma$  (resp. dos fechamentos  $\Phi$ ) é um subconjunto sup-fechado (resp. inf-fechado) de  $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ .  $\square$

**Prova** ([RonHei91, Prop. 2.1]) – Seja  $\Psi \subset \Gamma$ . Pela Proposição 3.6,  $\text{sup}\Psi$  é anti-extensivo.

Vamos provar que  $\text{sup}\Psi$  é isotônico. Os operadores em  $\Psi$  sendo isotônicos, pelo que foi visto na Seção 3.3,  $\text{sup}\Psi$  é também isotônico.

Vamos provar que  $\text{sup}\Psi$  é idempotente. De um lado, para todo  $\Psi \subset \Gamma$  e  $\gamma \in \Psi$ ,

$$\gamma = \gamma\gamma \quad (\gamma \text{ é idempotente})$$

$$\leq \gamma(\text{sup}\Psi) \quad (\gamma \text{ é isotônica, } \gamma \leq \text{sup}\Psi \text{ e Proposição 3.15})$$

$$\leq (\text{sup}\Psi)(\text{sup}\Psi), \quad (\gamma \leq \text{sup}\Psi \text{ e Proposição 3.15})$$



isto é,  $(\sup\Psi)(\sup\Psi)$  é l.s. de  $\Psi$  e, pela definição de supremo,  $\sup\Psi \leq (\sup\Psi)(\sup\Psi)$ . Por outro lado, para todo  $\Psi \subset \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \sup\Psi \leq \iota &\Rightarrow (\sup\Psi)(\sup\Psi) \leq \iota(\sup\Psi) && \text{(Proposição 3.15)} \\ &\Leftrightarrow (\sup\Psi)(\sup\Psi) \leq (\sup\Psi), && (\iota \text{ é o elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

isto é, desde que  $(\sup\Psi \leq \iota)$  é sempre verdade  $(\sup\Psi \text{ é anti-extensivo})$ , temos  $(\sup\Psi)(\sup\Psi) \leq \sup\Psi$ . Assim, pela anti-simetria de  $\leq$ ,  $(\sup\Psi)(\sup\Psi) = \sup\Psi$  e  $\sup\Psi$  é idempotente.

Isto prova que, para todo  $\Psi \subset \Gamma$ ,  $\sup\Psi$  é uma abertura. Conseqüentemente,  $\Gamma$  é um conjunto sup-fechado. A prova que  $\Phi$  é um conjunto inf-fechado é similar ou ainda decorre por dualidade do fato que  $\Gamma$  é um conjunto sup-fechado.  $\square$

Pelas Proposições 3.9 e 6.1, o conjunto  $\Gamma$  das aberturas (resp.  $\Phi$  dos fechamentos) provido da relação de ordem  $\leq$  é um *reticulado completo*.

No caso das aberturas, para todo  $\Psi \subset \Gamma$ , temos

$$\sup_{\mathfrak{P}} \Psi = \sup_{\Gamma} \Psi \quad \text{e} \quad \inf_{\Gamma} \Psi \leq \inf_{\mathfrak{P}} \Psi.$$

Associado a cada operador, podemos definir uma coleção particular de subconjuntos chamado de domínio de invariância.

**Definição 6.2** (domínio de invariância de um operador) – Seja  $X$  um subconjunto de  $E$ , e seja  $\psi$  um operador sobre  $\mathfrak{P}(E)$ . O subconjunto  $X$  é *invariante de  $\psi$*  se e somente se  $\psi(X) = X$ . A coleção de todos os invariantes de  $\psi$  é o *domínio de invariância de  $\psi$*  e é denotada por  $\text{Inv}(\psi)$ .  $\square$

**Exercício 6.2** (domínio de invariância de um operador idempotente) – Mostre que  $\psi$  é um operador idempotente (de tipo 1) se e somente se  $\text{Inv}(\psi) = \psi(\mathfrak{P})$ .  $\square$

**Prova** – Seja  $\psi$  um operador idempotente. Por um lado, pela definição de idempotência,  $\psi(X)$  é um invariante de  $\psi$ , o que prova que  $\psi(\mathfrak{P}) \subset \text{Inv}(\psi)$ . Por outro lado, pela definição de imagem de um mapeamento,  $\psi(X) \in \psi(\mathfrak{P})$ , assim, para todo  $X \in \mathfrak{P}$ , se  $X \notin \psi(\mathfrak{P})$  então  $X \neq \psi(X)$  e, conseqüentemente,  $X \notin \text{Inv}(\psi)$ . Em outros termos,  $\text{Inv}(\psi) \subset \psi(\mathfrak{P})$ . O que prova, pela transitividade da inclusão, que  $\text{Inv}(\psi) = \psi(\mathfrak{P})$ .

Inversamente, seja  $\psi$  um operador que verifica  $\text{Inv}(\psi) = \psi(\mathfrak{P})$ . Pela definição de imagem de um mapeamento, para todo  $X \in \mathfrak{P}$ ,  $\psi(X)$  é um invariante de  $\psi$ , então, pela definição de invariante,  $\psi(\psi(X)) = \psi(X)$ . O que prova que  $\psi$  é um operador idempotente.  $\square$

**Proposição 6.2** (propriedade do domínio de invariância dos operadores isotônicos e anti-extensivos) – Seja  $\psi$  um operador isotônico e anti-extensivo (resp. extensivo), então seu domínio de invariância  $\text{Inv}(\psi)$  é uma subcoleção sup-fechada (resp. inf-fechada).  $\square$

**Prova** – Para todo operador  $\psi$  isotônico e anti-extensivo, seja  $\mathfrak{S} \subset \text{Inv}(\psi)$  e  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ . Por um lado, para todo  $B \in \mathfrak{S}$ ,

$$\begin{aligned} B &= \psi(B) && (B \in \text{Inv}(\psi)) \\ &\subset \psi(\sup\mathfrak{S}), && (B \subset \sup\mathfrak{S} \text{ e } \psi \text{ é isotônico}) \end{aligned}$$

isto é,  $\psi(\sup\mathfrak{S})$  é l.s. de  $\mathfrak{S}$  ou ainda, pela definição de supremo,  $\sup\mathfrak{S} \subset \psi(\sup\mathfrak{S})$ . Por outro lado, pela anti-extensividade de  $\psi$ ,  $\psi(\sup\mathfrak{S}) \subset \sup\mathfrak{S}$ . Pela anti-simetria de  $\subset$ , isto prova que para todo  $\mathfrak{S} \subset \text{Inv}(\psi)$  e  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ ,  $\psi(\sup\mathfrak{S}) = \sup\mathfrak{S}$ . No caso  $\mathfrak{S} = \emptyset$ , pela anti-extensividade de  $\psi$ ,  $\psi(\emptyset) \leq \emptyset$ , isto é,  $\psi(\emptyset) = \emptyset$ . Assim, para todo  $\mathfrak{S} \subset \text{Inv}(\psi)$ ,  $\sup\mathfrak{S} \in \text{Inv}(\psi)$ . Em outros termos,  $\text{Inv}(\psi)$  é uma subcoleção sup-fechada.

No caso dos operadores  $\psi$ , isotônicos e extensivos, a prova que  $\text{Inv}(\psi)$  é uma subcoleção inf-fechada é similar ou ainda decorre por dualidade do fato que  $\text{Inv}(\psi)$  é uma subcoleção sup-fechada quando  $\psi$  é isotônico e anti-extensivo.  $\square$

Vamos agora introduzir um mecanismo de construção de aberturas e fechamentos.

Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção qualquer de  $\mathfrak{P}$ , consideramos agora os operadores  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\phi_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathfrak{P}$  definidos por

$$\gamma_{\mathfrak{B}}(X) = \sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \quad (X \in \mathfrak{P})$$

$$\phi_{\mathfrak{B}}(X) = \inf\{B \in \mathfrak{B} : X \subset B\} \quad (X \in \mathfrak{P}).$$

**Proposição 6.3** (construção de aberturas e fechamentos) – Para todo  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é uma abertura sobre  $\mathfrak{P}$ , e  $\phi_{\mathfrak{B}}$  é um fechamento sobre  $\mathfrak{P}$ .  $\square$

**Prova** – Seja  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$ . Vamos provar que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é isotônica. Para todo  $X_1$  e  $X_2$  em  $\mathfrak{P}$ ,

$$X_1 \subset X_2 \Rightarrow \{B \in \mathfrak{B} : B \subset X_1\} \subset \{B \in \mathfrak{B} : B \subset X_2\} \quad (\text{transitividade})$$

$$\Rightarrow \gamma_{\mathfrak{B}}(X_1) \subset \gamma_{\mathfrak{B}}(X_2). \quad (\text{definição de } \gamma_{\mathfrak{B}} \text{ e propriedade do supremo})$$

Isto prova que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é isotônica.

Vamos provar que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é anti-extensivo. Para todo  $X$  em  $\mathfrak{P}$ ,  $X$  é l.s. de  $\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\}$ , isto é, pela definição de supremo,  $\sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \subset X$  ou ainda, pela definição de  $\gamma_{\mathfrak{B}}$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}}(X) \subset X$ . Isto prova que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é anti-extensivo.

Vamos provar que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é idempotente. Por um lado,

$$\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \iota \Rightarrow \gamma_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_{\mathfrak{B}} \quad (\text{Proposição 3.15})$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_{\mathfrak{B}} \quad (\iota \text{ é elemento neutro da composição})$$

isto é, desde que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é anti-extensivo ( $\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \iota$ ), temos  $\gamma_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_{\mathfrak{B}}$ . Por outro lado, para todo  $X$  em  $\mathfrak{P}$ ,

$$\gamma_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}}(X) = \gamma_{\mathfrak{B}}(\gamma_{\mathfrak{B}}(X)) \quad (\text{definição do composto})$$

$$= \gamma_{\mathfrak{B}}(\sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\}) \quad (\text{definição de } \gamma_{\mathfrak{B}})$$

$$\supset \sup\gamma_{\mathfrak{B}}(\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\}) \quad (\gamma_{\mathfrak{B}} \text{ é isotônico e Proposição 3.1})$$

$$= \sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \quad (\gamma_{\mathfrak{B}}(B) = B \text{ (} B \in \mathfrak{B}\text{)})$$

$$= \gamma_{\mathfrak{B}}(X),$$

isto é, pela definição de  $\leq$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}}$ . Assim, pela anti-simetria de  $\leq$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}} = \gamma_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}}$ , o que prova que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é idempotente.

Em outros termos,  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é uma abertura. A prova que  $\phi_{\mathfrak{B}}$  é um fechamento decorre por dualidade do fato que  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é uma abertura.  $\square$

Os operadores  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\phi_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathfrak{P}$  chamam-se, respectivamente, *abertura pela coleção*  $\mathfrak{B}$  (ou *abertura por*  $\mathfrak{B}$ ) e *fechamento pela coleção*  $\mathfrak{B}$  (ou *fechamento por*  $\mathfrak{B}$ ). A Figura 6.1 mostra uma abertura por uma coleção de apenas dois subconjuntos. Desde que os dois subconjuntos são contidos em  $X$ , o resultado da abertura de  $X$  é a união destes. A Figura 6.2 mostra um fechamento por uma outra coleção de dois subconjuntos. Desde que os dois subconjuntos contêm  $X$ , o resultado do fechamento de  $X$  é a interseção destes.

Agora, estamos interessados em mostrar que o mecanismo de construção de aberturas e fechamentos da Proposição 6.3 é capaz de gerar todas as aberturas e fechamentos. Em outros termos, queremos caracterizar estas duas classes de operadores. Precisamos antes enunciar mais uma proposição relativa às aberturas. Por dualidade, teríamos uma proposição similar relativa aos fechamentos.

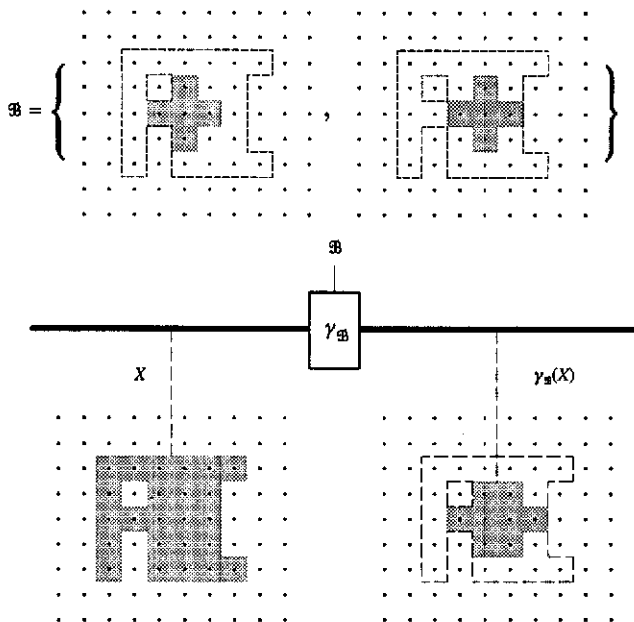


Fig. 6.1 – Abertura algébrica de um subconjunto.

**Proposição 6.4** (propriedade das aberturas) – Seja  $\gamma$  uma abertura sobre  $\mathcal{P}$  e  $\psi$  um operador sobre  $\mathcal{P}$ , isotônico e anti-extensivo. Então as quatro proposições abaixo são equivalentes:

- (1)  $\gamma \leq \psi$ ;
- (2)  $\gamma\psi = \gamma$ ;
- (3)  $\psi\gamma = \gamma$ ;
- (4)  $\text{Inv}(\gamma) \subset \text{Inv}(\psi)$ .

□

**Prova** ([RonHei91, Prop. 2.3]) – Vamos provar que (1) implica (2).

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \gamma\gamma && (\gamma \text{ é idempotente}) \\
 &\leq \gamma\psi && (\gamma \text{ é isotônica, } \gamma \leq \psi \text{ e Proposição 3.15}) \\
 &\leq \gamma\iota && (\gamma \text{ é isotônica, } \psi \leq \iota \text{ e Proposição 3.15}) \\
 &= \gamma, && (\iota \text{ é elemento neutro da composição})
 \end{aligned}$$

isto é,  $\gamma \leq \gamma\psi$  e  $\gamma\psi \leq \gamma$ , e pela anti-simetria de  $\leq$ ,  $\gamma\psi = \gamma$ .

Vamos provar que (2) implica (3).

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \gamma\gamma && (\gamma \text{ é idempotente}) \\
 &= \gamma\psi\gamma && (\gamma\psi = \gamma) \\
 &\leq \iota\psi\gamma && (\gamma \leq \iota \text{ e Proposição 3.15}) \\
 &= \psi\gamma && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \\
 &\leq \iota\gamma && (\psi \leq \iota \text{ e Proposição 3.15}) \\
 &\leq \gamma, && (\iota \text{ é elemento neutro da composição})
 \end{aligned}$$

isto é,  $\gamma \leq \gamma\gamma$  e  $\psi\gamma \leq \gamma$ , e pela anti-simetria de  $\leq$ ,  $\psi\gamma = \gamma$ .

Vamos provar que (3) implica (4). Para todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 X \in \text{Inv}(\gamma) &\Leftrightarrow X = \gamma(X) && (\text{definição de Inv}) \\
 &\Rightarrow \psi(X) = \psi(\gamma(X)) \text{ e } X = \gamma(X) && (\psi \text{ é mapeamento}) \\
 &\Leftrightarrow \psi(X) = \psi\gamma(X) \text{ e } X = \gamma(X) && (\text{definição de composto}) \\
 &\Leftrightarrow \psi(X) = \gamma(X) \text{ e } X = \gamma(X) && (\psi\gamma = \gamma) \\
 &\Leftrightarrow \psi(X) = X && (\text{equivalência lógica}) \\
 &\Leftrightarrow X \in \text{Inv}(\psi), && (\text{definição de Inv})
 \end{aligned}$$

isto é,  $\text{Inv}(\gamma) \subset \text{Inv}(\psi)$ .

Vamos provar que (4) implica (3). Para todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 \gamma(X) &\in \text{Inv}(\gamma) && (\text{idempotência de } \gamma) \\
 &\in \text{Inv}(\psi), && (\text{Inv}(\gamma) \subset \text{Inv}(\psi) \text{ e definição de } \subset)
 \end{aligned}$$

isto é, pela definição de  $\text{Inv}$ ,  $\psi(\gamma(X)) = \gamma(X)$ . Em outros termos,  $\psi\gamma = \gamma$ .

Vamos provar que (3) implica (1).

$$\begin{aligned}
 \gamma \leq \iota &\Rightarrow \psi\gamma \leq \psi\iota && (\text{Proposição 3.15}) \\
 &\Leftrightarrow \psi\gamma \leq \psi && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \\
 &\Leftrightarrow \gamma \leq \psi, && (\psi\gamma = \gamma)
 \end{aligned}$$

isto é, desde que  $\gamma$  é anti-extensivo,  $\gamma \leq \psi$ . □

Para podermos caracterizar as aberturas e os fechamentos, vamos precisar das subcoleções sup-fechadas e inf-fechadas de  $\mathcal{P}$  (ver Proposição 3.9). Denotaremos por  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$  o conjunto das subcoleções sup-fechadas e por  $\mathcal{I}(\mathcal{P})$  o das subcoleções inf-fechadas. Lembramos que uma subcoleção sup-fechada chama-se também *família de Moore* [Birkho67]. Vamos caracterizar primeiro as aberturas.

**Proposição 6.5** (caracterização das aberturas) – O mapeamento de  $\Gamma$  em  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ ,

$$\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma),$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$\mathfrak{B} \mapsto \gamma_{\mathfrak{B}}.$$

□

**Prova** – Antes de tudo, verificamos que pela Proposição 6.2, para todo  $\gamma$  sobre  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Inv}(\gamma)$  é uma subcoleção sup-fechado de  $\mathcal{P}$ , e pela Proposição 6.3, para todo  $\mathfrak{B}$  subcoleção de  $\mathcal{P}$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é uma abertura.

Vamos provar que  $\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$  é uma bijeção. Em primeiro lugar, para todo operador  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sobre  $\mathfrak{P}$ ,

$$\text{Inv}(\gamma_1) = \text{Inv}(\gamma_2) \Leftrightarrow \text{Inv}(\gamma_1) \subset \text{Inv}(\gamma_2) \text{ e } \text{Inv}(\gamma_2) \subset \text{Inv}(\gamma_1) \quad (\text{reflexividade e anti-simetria de } \subset)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 \leq \gamma_2 \text{ e } \gamma_2 \leq \gamma_1 \quad (\text{Proposição 6.4})$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2. \quad (\text{reflexividade e anti-simetria de } \leq)$$

Isto prova que o mapeamento  $\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$  é injetor.

Em segundo lugar, para todo  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{P})$  e  $X \in \mathfrak{P}$ ,

$$X \in \text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) \Leftrightarrow X = \gamma_{\mathfrak{B}}(X) \quad (\text{definição de Inv})$$

$$\Leftrightarrow X = \sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \quad (\text{definição de } \gamma_{\mathfrak{B}})$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathfrak{B}, \quad (\text{"}\mathfrak{B} \text{ é sup-fechado"} \text{ prova } \Rightarrow)$$

$$(\text{"}X \text{ é o maior elemento de } \{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \text{" prova } \Leftarrow)$$

em outros termos, para todo  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{P})$ ,  $\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{B}$ . Isto prova que o mapeamento  $\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$  é sobrejeitor e conseqüentemente é uma bijeção.  $\square$

A Proposição 6.5 mostra que existe uma correspondência um por um entre  $\Gamma$  e  $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$ . As subcoleções sup-fechadas de  $\mathfrak{P}$  caracterizam sem ambigüidade as aberturas. A Figura 6.3 ilustra este resultado.

Em relação aos fechamentos, temos um resultado dual. O mapeamento de  $\Phi$  em  $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$  dado por  $\phi \mapsto \text{Inv}(\phi)$  é uma bijeção e seu inverso é  $\mathfrak{B} \mapsto \phi_{\mathfrak{B}}$ . Isto é, temos a correspondência um por um entre as famílias de Moore e os fechamentos.

Com a Proposição 6.5 podemos dar uma interpretação interessante da abertura por uma subcoleção sup-fechada de um subconjunto  $X$ . Se  $\mathfrak{B}$  é uma subcoleção sup-fechada, então, pela Proposição 6.5,  $\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{B}$ . Conseqüentemente, pela idempotência de  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e pelo Exercício 6.2, para todo  $X$  em  $\mathfrak{P}$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}}(X) \in \mathfrak{B}$ , isto é, pelas definições de  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e de supremo, o subconjunto  $\gamma_{\mathfrak{B}}(X)$  é o maior subconjunto  $B$  de  $\mathfrak{B}$  tal que  $B \subset X$ .

Os subconjuntos  $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$  e  $\mathfrak{I}(\mathfrak{P})$  são reticulados completos. Isto decorre da Proposição 3.9 e do fato que estes são, respectivamente, inf-fechado e sup-fechado. Vamos provar, por exemplo, que  $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$  é um subconjunto inf-fechado. Para todo  $X \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{P})$  e  $\mathfrak{K} \subset \text{inf}X$ , pela definição de ínfimo,  $\mathfrak{K}$  é l.i. de  $X$ , isto é,  $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$  para todo  $\mathfrak{B} \in X$ . Mas, como todo elemento de  $X$  é sup-fechado,  $\text{sup}\mathfrak{K} \in \mathfrak{B}$  para todo  $\mathfrak{B} \in X$ .

Então, pela definição de interseção,  $\text{sup}\mathfrak{K} \in \bigcap_{\mathfrak{B} \in X} \mathfrak{B}$ , isto é, pela propriedade da interseção,

$\text{sup}\mathfrak{K} \in \text{inf}X$ . Em outros termos,  $\text{inf}X$  é uma coleção sup-fechada, ou ainda,  $\text{inf}X \in \mathfrak{F}(\mathfrak{P})$ . Isto prova que  $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$  é um subconjunto inf-fechado.

Em relação às aberturas, podemos então enunciar a seguinte proposição.

**Proposição 6.6** (isomorfismo de reticulados) – O reticulado  $\Gamma$  das aberturas sobre  $\mathfrak{P}$  e o reticulado do conjunto  $\mathfrak{F}(\mathfrak{P})$ , são isomorfos. Em outros termos,  $\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$  é um isomorfismo de reticulado, isto é,  $\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$  é uma bijeção e para todo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $\Gamma$ ,

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \text{Inv}(\gamma_1) \subset \text{Inv}(\gamma_2). \quad (\text{isotonia dupla})$$

$\square$

**Prova** – O resultado decorre das Proposições 6.4 e 6.5.  $\square$

Em relação aos fechamentos, temos uma proposição dual.

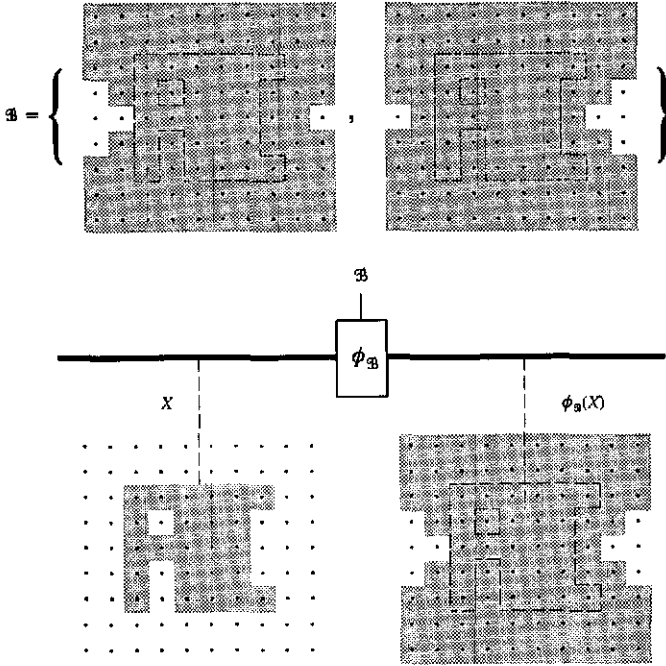


Fig. 6.2 – Fechamento algébrico de um subconjunto.

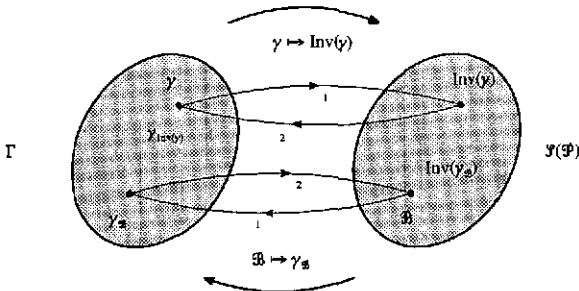


Fig. 6.3 – Bijeção entre as aberturas e as coleções sup-fechadas.

**Proposição 6.7** (propriedade da união e interseção de aberturas) – Seja  $(\gamma_i)_{i \in I}$  uma família de aberturas sobre  $\mathcal{P}$ , seja  $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$  a família dos respectivos domínios de invariância, isto é,  $\mathfrak{B}_i = \text{Inv}(\gamma_i)$  para todo  $i \in I$ , e seja  $B_i = \{\mathfrak{B} \in \mathcal{Y}(\mathcal{P}) : \exists i \in I, \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i\}$ . Então

$$\gamma_{\sup_{\mathcal{Y}(\mathcal{P})} B_i} = \bigvee_{i \in I} \gamma_i$$

$$\gamma_{\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i} \leq \bigwedge_{i \in I} \gamma_i. \quad \square$$

**Prova** – A prova é similar a da Proposição 3.12. □

Em particular, a união de duas aberturas (distintas) coincide com a abertura pelo supremo dos domínios de invariância. A interseção de duas aberturas é maior que a abertura pela interseção dos domínios de invariância. Em outros termos,

$$\gamma_{\sup_{\mathcal{Y}(\mathcal{P})} (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)} = \gamma_1 \vee \gamma_2 \text{ e } \gamma_{\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2} \leq \gamma_1 \wedge \gamma_2.$$

Pela Proposição 3.8,  $\sup_{\mathcal{Y}(\mathcal{P})} \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\}$  é a menor subcoleção sup-fechada que contém  $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ .

Como Ward em 1942 [Szász71], é interessante notar que uma abertura (resp. fechamento) com domínio de invariância  $\mathfrak{B}$  produz o ínfimo (resp. supremo) em  $\mathfrak{B}$  de uma subcoleção qualquer de subconjuntos em  $\mathfrak{B}$  a partir da interseção (resp. união) destes.

**Proposição 6.8** (propriedade do domínio de invariância das aberturas e dos fechamentos) – Seja  $\gamma$  uma abertura sobre  $\mathcal{P}$  e seja  $\mathfrak{B}$  seu domínio de invariância. A coleção  $\mathfrak{B}$  é um reticulado completo relativamente a inclusão e para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ ,

$$\inf_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S} = \gamma_{\mathfrak{B}} \left( \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X \right).$$

Seja  $\phi$  um fechamento sobre  $\mathcal{P}$  e seja  $\mathfrak{B}$  seu domínio de invariância. A coleção  $\mathfrak{B}$  é um reticulado completo relativamente a inclusão e para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ ,

$$\sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S} = \phi_{\mathfrak{B}} \left( \bigcup_{X \in \mathfrak{S}} X \right). \quad \square$$

**Prova** – De um lado, pela Proposição 6.2,  $\mathfrak{B}$  é uma subcoleção sup-fechada de  $(\mathcal{P}, \subset)$ , então pela Proposição 3.9,  $(\mathfrak{B}, \subset)$  é um reticulado completo. De outro lado, para todo  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$ ,

$$\inf_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S} = \sup\{B \in \mathfrak{B} : B \text{ é l.i. de } \mathfrak{S}\} \quad (\text{Proposição 3.8})$$

$$= \sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset \inf_{\mathcal{P}} \mathfrak{S}\} \quad (\text{definição de ínfimo})$$

$$= \sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X\} \quad (\text{propriedade da interseção})$$

$$= \gamma_{\mathfrak{B}} \left( \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X \right). \quad (\text{definição de abertura por } \mathfrak{B})$$

A prova do resultado sobre os fechamentos é similar a prova decorre do resultado sobre as aberturas por dualidade.  $\square$

As vezes, é interessante fazer uma distinção entre os invariantes de uma abertura e os de um fechamento.

**Definição 6.3** (abertos e fechados) – Sejam  $\gamma$  e  $\phi$ , respectivamente, uma abertura e um fechamento sobre  $\mathcal{P}$ . Os invariantes de  $\gamma$  chamam-se de *abertos relativos a  $\gamma$* . Os invariantes de  $\phi$  chamam-se de *fechados relativos a  $\phi$* .  $\square$

Pela Proposição 6.2, a união de abertos é um aberto e a interseção de fechados é um fechado.

Antes de terminar esta seção, vamos introduzir a noção de subcoleção sup-fechada gerada e apresentar três proposições interessantes ligadas as aberturas.

Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção qualquer de  $\mathcal{P}$ . A *subcoleção sup-fechada gerada por  $\mathfrak{B}$*  é a subcoleção de  $\mathcal{P}$ , denotada  $\overline{\mathfrak{B}}$  e dada por

$$\overline{\mathfrak{B}} = \{X \in \mathcal{P} : \exists \mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}, \text{sup}\mathfrak{K} = X\}.$$

**Proposição 6.9** (domínio de invariância de uma abertura por uma subcoleção) – Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção de  $\mathcal{P}$  então

$$\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) = \overline{\mathfrak{B}}. \quad \square$$

**Prova** – Para toda subcoleção  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{P}$ ,

$$X \in \text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) \Leftrightarrow \gamma_{\mathfrak{B}}(X) = X \quad (\text{definição de Inv})$$

$$\Leftrightarrow \text{sup}\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} = X \quad (\text{definição de } \gamma_{\mathfrak{B}})$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}, \text{sup}\mathfrak{K} = X$$

$$(\mathfrak{K} = \{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \text{ prova } \Rightarrow)$$

$$(X = \text{sup}\mathfrak{K} \subset \text{sup}\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\} \subset X \text{ prova } \Leftarrow)$$

$$\Leftrightarrow X \in \overline{\mathfrak{B}}, \quad (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}})$$

isto é,  $\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) = \overline{\mathfrak{B}}$ .  $\square$

Esta primeira proposição associada as Proposições 6.2 e 6.3 mostra que  $\overline{\mathfrak{B}}$  é realmente uma subcoleção sup-fechado, isto é,  $\overline{\mathfrak{B}} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ .

Se  $\mathfrak{B}$  é uma subcoleção sup-fechada então, pela Proposição 6.5,  $\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{B}$ , mas pela Proposição 6.9,  $\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) = \overline{\mathfrak{B}}$ , isto prova que, neste caso,  $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$ .

Observamos que o mapeamento de  $\mathcal{P}(\mathcal{P})$  em  $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ ,  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  é a composição  $\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$  por  $\mathfrak{B} \mapsto \gamma_{\mathfrak{B}}$ .

**Proposição 6.10** (fechamento das subcoleções de subconjuntos) – O mapeamento de  $\mathcal{P}(\mathcal{P})$  em  $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ ,  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  é um fechamento.  $\square$

**Prova** – Vamos provar que  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  é isotônico. Para todo  $\mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_2$  tal que  $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ , e todo  $X$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$X \in \overline{\mathfrak{B}_1} \Leftrightarrow \exists \mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}_1, \text{sup}\mathfrak{K} = X \quad (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}})$$

$$\Rightarrow \exists \mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}_2, \text{sup}\mathfrak{K} = X \quad (\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2)$$

$$\Leftrightarrow X \in \overline{\mathfrak{B}_2}, \quad (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}})$$



isto é,  $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}_1} \subset \overline{\mathfrak{A}_2}$ .

Vamos provar que  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  é extensivo. Para todo  $X \in \mathfrak{P}$ ,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{B} &\Rightarrow \exists \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}, \sup \mathfrak{C} = X && (\mathfrak{B} = \{X\}) \\ &\Leftrightarrow X \in \overline{\mathfrak{B}}, && (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}}) \end{aligned}$$

isto é,  $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$ .

Vamos provar que  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  é idempotente. Por um lado, pela extensividade  $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$  e pela isotonia  $\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ . Por outro lado, para todo  $X \in \mathfrak{P}$ ,

$$\begin{aligned} X \in \overline{\mathfrak{B}} &\Leftrightarrow \exists \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}, \sup \mathfrak{C} = X && (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}}) \\ &\Rightarrow X \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}, && (\overline{\mathfrak{B}} \text{ é sup-fechado}) \end{aligned}$$

isto é,  $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \subset \overline{\mathfrak{B}}$ . Assim,  $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\mathfrak{B}}$ . □

Com esta segunda proposição observamos o seguinte. Seja  $B_I = \{\mathfrak{B} \in \mathcal{F}(\mathfrak{P}) : \exists i \in I, \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i\}$ . Aplicando ao fechamento  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  a Proposição 6.8, para toda família  $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$  a valores em  $\mathcal{F}(\mathfrak{P})$ , temos

$$\sup_{\mathcal{F}(\mathfrak{P})} B_I = \overline{\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i}.$$

Assim, a igualdade da Proposição 6.7 pode se reescrever

$$\gamma_{\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i} = \bigvee_{i \in I} \gamma_i$$

Em particular, a união de duas aberturas (distintas) coincide com a abertura pela subcoleção sup-fechada gerada pela união dos domínios de invariância. Em outros termos,

$$\gamma_{\overline{\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2}} = \gamma_1 \vee \gamma_2.$$

**Proposição 6.11** (aberturas equivalentes) – Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção de  $\mathfrak{P}$  então

$$\gamma_{\mathfrak{B}} = \gamma_{\overline{\mathfrak{B}}}. \quad \square$$

**Prova** – Para todo  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) &= \overline{\mathfrak{B}} && (\text{Proposição 6.9}) \\ &= \overline{\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}})} && (\text{Proposição 6.9}) \\ &= \text{Inv}(\gamma_{\overline{\mathfrak{B}}}), && (\text{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) \text{ é sup-fechada}) \end{aligned}$$

isto é, pela Proposição 6.5, para todo  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$ ,  $\gamma_{\mathfrak{B}} = \gamma_{\overline{\mathfrak{B}}}$ . □

Com esta terceira proposição, a igualdade da Proposição 6.7 pode ainda se simplificar

$$\gamma_{\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i} = \bigvee_{i \in I} \gamma_i$$

Em particular, a união de duas aberturas (distintas) coincide, simplesmente, com a abertura pela união dos domínios de invariância. Em outros termos,

$$\gamma_{\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2} = \gamma_1 \vee \gamma_2.$$

Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção sup-fechada. Uma subcoleção  $\mathfrak{B}'$  tal que  $\overline{\mathfrak{B}'} = \mathfrak{B}$ , chama-se de *base de  $\mathfrak{B}$* .

Encontrada uma base para  $\mathfrak{B}$ , temos uma maneira de simplificar a construção da abertura por  $\mathfrak{B}$ . De fato, pela Proposição 6.11, a abertura por  $\mathfrak{B}$  é idêntica a abertura pela base  $\mathfrak{B}'$ , em outros termos,  $\gamma_{\mathfrak{B}} = \gamma_{\mathfrak{B}'}$ .

## 6.2 Aberturas e fechamentos morfológicos

Vamos agora deduzir algumas propriedades adicionais relativas aos pares de erosões e dilatações formando as conexões de Galois do Capítulo 12.

**Proposição 6.12** (propriedade das conexões de Galois) – Seja  $(\varepsilon, \delta)$  uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ , então

$$\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon \quad \text{e} \quad \delta\varepsilon\delta = \delta. \quad \square$$

**Prova** – Seja  $(\varepsilon, \delta)$  um par de operadores sobre  $\mathcal{P}$ . Por um lado,

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \delta) \text{ é conexão de Galois} &\Rightarrow \delta\varepsilon \leq \iota && \text{(definição de conexão de Galois)} \\ &\Rightarrow \varepsilon\delta\varepsilon \leq \varepsilon\iota && (\varepsilon \text{ é isotônico e Proposição 3.15}) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\delta\varepsilon \leq \varepsilon. && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

De outro lado,

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \delta) \text{ é conexão de Galois} &\Rightarrow \iota \leq \varepsilon\delta && \text{(definição de conexão de Galois)} \\ &\Rightarrow \iota\varepsilon \leq \varepsilon\delta\varepsilon && \text{(Proposição 3.15)} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \leq \varepsilon\delta\varepsilon. && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

Em outros termos, pela anti-simetria de  $\leq$ ,  $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$ .

A prova que  $\delta\varepsilon\delta = \delta$ , é similar. □

Da Proposição 6.12, deduzimos, que, para toda conexão de Galois  $(\varepsilon, \delta)$ ,

$$\varepsilon\delta\varepsilon\delta = \varepsilon\delta \quad \text{e} \quad \delta\varepsilon\delta\varepsilon = \delta\varepsilon.$$

**Proposição 6.13** (propriedade da composição de erosão – dilatação formando uma conexão de Galois) – Seja  $(\varepsilon, \delta)$  uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ , então  $\delta\varepsilon$  e  $\varepsilon\delta$  são, respectivamente, uma abertura e um fechamento sobre  $\mathcal{P}$ . □

**Prova** – Seja  $(\varepsilon, \delta)$  uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ . Pela definição de conexão de Galois, os operadores  $\delta\varepsilon$  e  $\varepsilon\delta$  são isotônicos e, respectivamente, anti-extensivo e extensivo. Pela Proposição 6.12, os operadores  $\delta\varepsilon$  e  $\varepsilon\delta$  são também idempotentes. Isto prova que  $\delta\varepsilon$  e  $\varepsilon\delta$  são, respectivamente, uma abertura e um fechamento. □

Esta proposição justifica a seguinte definição.

**Definição 6.4** (abertura e fechamento morfológico) – Um operador  $\gamma$  sobre  $\mathcal{P}$  é uma *abertura morfológica* se e somente se existe uma conexão de Galois  $(\varepsilon, \delta)$  entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$  tal que  $\gamma = \delta\varepsilon$ . Um operador  $\phi$  sobre  $\mathcal{P}$  é um *fechamento morfológico* se e somente se existe uma conexão de Galois  $(\varepsilon, \delta)$  entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$  tal que  $\gamma = \varepsilon\delta$ . □

Observamos que o mapeamento das conexões de Galois em  $\Gamma$ ,  $(\varepsilon, \delta) \mapsto \delta\varepsilon$  não é injetor. O exemplo abaixo mostra que duas conexões de Galois podem gerar a mesma abertura morfológica.

Seja  $E = \text{Ret}(n_1, n_2)$ , seja  $A = \{(x_1, x_2) \in E : x_1 = 0\}$  e seja  $a$  a seguinte função estruturante de  $E$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$a(y) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } y \in A \\ \{y\} + (0, 1) & \text{c.c.} \end{cases} \quad (y \in E).$$

Então  $\delta_a \varepsilon_a = \iota$  e  $\varepsilon_a \delta_a = \iota$ , isto é, as conexões de Galois  $(\varepsilon_a, \delta_a)$  e  $(\iota, \iota)$  gerem a mesma abertura  $\iota$ .

Dado uma função estruturante  $a$  de  $E$  em  $\mathcal{P}$ , a *abertura (morfológica) por  $a$*  é a abertura morfológica sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\gamma_a$  tal que

$$\gamma_a = \delta_a \varepsilon_a.$$

e o *fechamento (morfológico) por  $a$*  é o fechamento morfológico sobre  $\mathcal{P}$ , denotado  $\phi_a$  tal que

$$\phi_a = \varepsilon_a \delta_a.$$

**Exercício 6.3** (definição equivalente de abertura por uma função estruturante) – Seja  $a$  uma função de  $E$  em  $\mathcal{P}$ . Usando as definições de  $\delta_a$  e  $\varepsilon_a$ , prove que

$$\gamma_a(X) = \bigcup_{y \in E \text{ e } a(y) \subset X} a(y) \quad (X \in \mathcal{P}). \quad \square$$

Toda abertura morfológica (resp. fechamento morfológico) é uma abertura algébrica (resp. fechamento algébrico). O contrário geralmente não vale, mas pelo Teorema 1.4 de [Serra88] sabemos que toda abertura algébrica pode se escrever como o supremo de aberturas morfológicas.

No caso das aberturas e fechamentos morfológicos, podemos determinar facilmente os abertos e os fechados.

**Proposição 6.14** (determinação dos abertos e dos fechados) – Seja  $(\varepsilon, \delta)$  uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ . Os abertos são as imagens de algum elemento de  $\mathcal{P}$  através da dilatação  $\delta$ . Os fechados são as imagens de algum elemento de  $\mathcal{P}$  através da erosão  $\varepsilon$ . Em outros termos,

$$\text{Inv}(\delta\varepsilon) = \delta(\mathcal{P}) \quad \text{e} \quad \text{Inv}(\varepsilon\delta) = \varepsilon(\mathcal{P}). \quad \square$$

**Prova** – Vamos provar o caso dos abertos. Para toda conexão de Galois  $(\varepsilon, \delta)$  entre  $(\mathcal{P}, \supset)$  e  $(\mathcal{P}, \subset)$ ,

$$\delta(\mathcal{P}) = \delta\varepsilon\delta(\mathcal{P}) \quad (\text{Proposição 6.12})$$

$$\subset \delta\varepsilon(\mathcal{P}) \quad (\text{propriedade dos mapeamentos})$$

$$\subset \delta(\mathcal{P}), \quad (\text{propriedade dos mapeamentos})$$

isto é, pela anti-simetria da inclusão.  $\delta(\mathcal{P}) = \varepsilon\delta(\mathcal{P})$  e, pela idempotência de  $\delta\varepsilon$  e pelo Exercício 6.2,  $\delta(\mathcal{P}) = \text{Inv}(\delta\varepsilon)$ .

A prova no caso dos fechados é similar. □

A Figura 6.4 ilustra este resultado.

**Exercício 6.4** (base do domínio de invariância de uma abertura por um elemento estruturante) – Usando a Proposição 6.14, mostre que a subcoleção  $\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E, a(y) = B\}$  é uma base para  $\text{Inv}(\gamma_a)$ . □

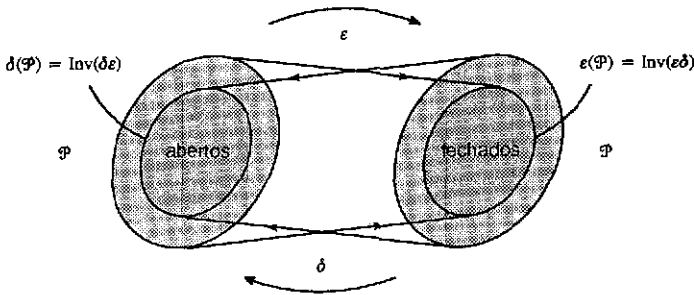


Fig. 6.4 – Determinação dos abertos e fechados relativos à uma conexão de Galois.

**Prova** – Para todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$X \in \delta_a(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}, \delta_a(Y) = X \quad (\text{definição da imagem de um mapeamento})$$

$$\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}, \bigcup_{y \in Y} a(y) = X \quad (\text{definição de } \delta_a)$$

$$\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}, \sup\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in Y, a(y) = B\} = X \quad (\text{propriedade da união})$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathfrak{B} \subset \{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E, a(y) = B\}, \sup \mathfrak{B} = X$$

( $\mathfrak{B} = \{B \in \mathcal{P} : \exists y \in Y, a(y) = B\}$  prova  $\Rightarrow$ )  
 ( $Y = \{y \in E : a(y) \in \mathfrak{B}\}$  prova  $\Leftarrow$ )

$$\Leftrightarrow X \in \overline{\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E, a(y) = B\}}. \quad (\text{definição de subcoleção sup-fechada gerada})$$

Isto é, pela Proposição 6.14,  $\text{Inv}(\gamma_a) = \overline{\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E, a(y) = B\}}$ .

Em outros termos, pela definição de base,  $\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E, a(y) = B\}$  é uma base para  $\text{Inv}(\gamma_a)$ . □

Pelo resultado do Exercício 6.4 e da Proposição 6.11, temos  $\gamma_a = \gamma_{\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E, a(y) = B\}}$ . Assim, temos um outro caminho para deduzir que a expressão de  $\gamma_a(X)$  do Exercício 6.3.

É muito importante notar que numa conexão de Galois  $(\varepsilon, \delta)$ ,  $\varepsilon$  e  $\delta$  não são geralmente mapeamentos recíprocos, isto é, um não é o inverso do outro ou ainda, nós não temos  $\delta\varepsilon = \text{id}$  ou  $\varepsilon\delta = \text{id}$ , temos apenas  $\delta\varepsilon \leq \text{id}$  e  $\varepsilon\delta \leq \text{id}$ . Por exemplo, o subconjunto  $X$ , uma vez erodido por uma erosão  $\varepsilon$  não pode ser reconstruído por meio da dilatação  $\delta$  (geralmente não temos  $\delta(\varepsilon(X)) = X$ ).

No entanto, esta reconstrução é possível para os fechados (relativos a  $\varepsilon\delta$ ) dilatados por  $\delta$ . Temos os seguintes resultados. Para todo  $Y \in \varepsilon(\mathcal{P})$  (isto é, para todo fechado relativo a  $\varepsilon\delta$ ), seja  $\mathfrak{X}_Y$  a coleção de todos os subconjuntos  $X$  em  $\mathcal{P}$  tal que  $\varepsilon(X) = Y$ . A dilatação de  $Y$  por  $\delta$ ,  $\delta(Y)$  é um elemento de  $\mathfrak{X}_Y$  ( $Y$  fechado,  $\varepsilon(\delta(Y)) = Y$ ),  $\delta(Y)$  pode ser reconstruído por meio da dilatação  $\delta$  após uma erosão por  $\varepsilon$  (pela Proposição 6.12,  $\delta\varepsilon(\delta(Y)) = \delta(Y)$ ),  $\delta(Y)$  é o único dentre de  $\mathfrak{X}_Y$  que pode ser reconstruído ( $\delta$  é um mapeamento) e  $\delta(Y)$  é o menor de todos os membros de  $\mathfrak{X}_Y$  ( $\delta(Y) = \delta\varepsilon(X) \leq X$ ).

A Figura 6.5 ilustra estes resultados. Nesta figura, a erosão  $\varepsilon$  e a dilatação  $\delta$  são invariantes por trans-

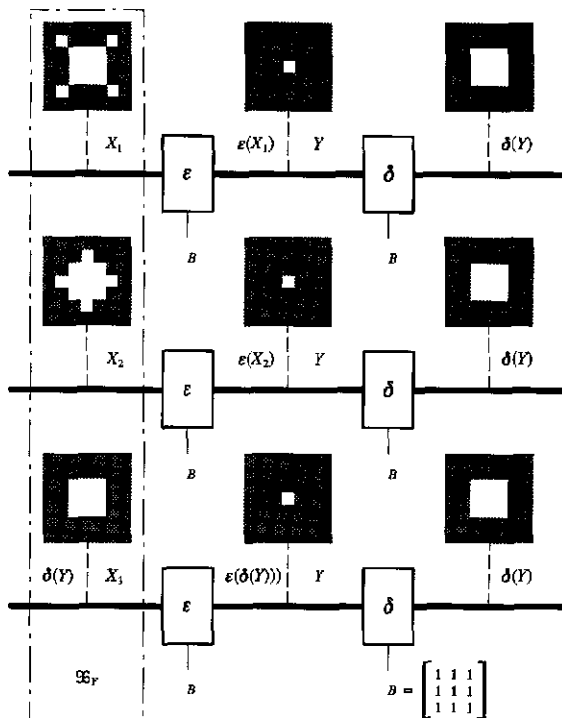


Fig. 6.5 – Problema da reconstrução após uma erosão.

lação e tem como elemento estruturante o quadrado  $3 \times 3$ . Os subconjuntos  $X_1, X_2$  e  $X_3$  ( $X_3 = \delta(Y)$ ) são exemplos de elementos de  $\mathfrak{S}_P$ , isto é, a suas erosões produzem  $Y$ . Observa-se que somente  $X_3$  pode ser reconstruído exatamente pela dilatação  $\delta$  após a erosão  $\varepsilon$ . Observa-se também que  $X_3$  é menor que  $X_1$  e  $X_2$ .

Como no caso das dilatações e erosões, podemos estabelecer relações entre as aberturas e os fechamentos por funções estruturantes. Vamos estabelecer uma relação baseada na dualidade por complementação da Seção 12.2. Precisamos do resultado do seguinte exercício.

**Exercício 6.5** (dual do composto) – Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois operadores sobre  $\mathfrak{P}$ . Prove que

$$(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$$

□

**Proposição 6.15** (transposição versus dualidade por complementação) – As proposições abaixo são equivalentes. Para todo  $a$  e  $b$  em  $\mathfrak{P}^E$ ,

$a$  e  $b$  mutuamente transposto  $\Leftrightarrow \gamma_a$  e  $\phi_b$  mutuamente duais por complementação;

$$\gamma_a^* = \phi_{a'};$$

$$\phi_b^* = \gamma_{b'}.$$

□

**Prova** – Vamos provar a segunda proposição. Para todo  $a$  em  $\mathfrak{P}^E$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_a^* &= (\delta_a \varepsilon_a)^* && \text{(definição de } \gamma_a) \\ &= \delta_a^* \varepsilon_a^* && \text{(Exercício 6.5)} \\ &= \varepsilon_{a'} \delta_{a'} && \text{(Proposição 14.12)} \\ &= \phi_{a'}. && \text{(definição de } \phi_{a'}) \end{aligned}$$

Em outros termos, a composição de  $\gamma \mapsto \gamma^*$  por  $a \mapsto \delta_a \varepsilon_a$ , isto é,  $a \mapsto \delta_a \varepsilon_a^*$  é idêntica a composição de  $b \mapsto \varepsilon_b \delta_b$  por  $a \mapsto a'$ , isto é,  $a \mapsto \varepsilon_{a'} \delta_{a'}$ .

As outras proposições decorrem deste resultado usando o fato que os mapeamentos  $\gamma \mapsto \gamma^*$ ,  $a \mapsto \delta_a \varepsilon_a$ ,  $b \mapsto \varepsilon_b \delta_b$  e  $a \mapsto a'$  são bijeções. □

A Figura 6.6 ilustra o resultado da Proposição 6.15 e mostra como ele é obtido.

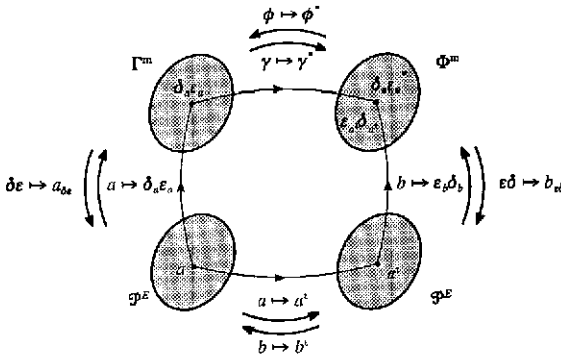


Fig. 6.6 – Transposição versus dualidade por complementação.

### 6.3 Aberturas e fechamentos invariantes por translação

Para estudar as aberturas e os fechamentos morfológicos invariantes por translação precisamos definir a noção de subcoleção invariante por translação.

**Definição 6.5** (subcoleção invariante por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Uma subcoleção  $\mathfrak{G}$  de  $\mathcal{P}(E)$  é *invariante por translação* (i.t.) se e somente se, para todo  $u \in E$ ,

$$\tau_u(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}. \quad \square$$

**Exercício 6.6** (condição suficiente para uma subcoleção ser i.t.) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\mathfrak{G}$  uma subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$  então

$$(\tau_u(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G} \quad (u \in E)) \Rightarrow \mathfrak{G} \text{ é i.t.} \quad \square$$

**Prova** – De um lado, por hipótese, para todo  $u \in E$ ,  $\tau_u(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$ . De outro lado, para todo  $u \in E$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{-u}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G} &\Rightarrow \tau_u(\tau_{-u}(\mathfrak{G})) \subset \tau_u(\mathfrak{G}) && (\tau_u \text{ é isotônico}) \\ &\Leftrightarrow \tau_u \tau_{-u}(\mathfrak{G}) \subset \tau_u(\mathfrak{G}) && (\text{definição de composto}) \\ &\Leftrightarrow \iota(\mathfrak{G}) \subset \tau_u(\mathfrak{G}) && (\text{lei do elemento neutro}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{G} \subset \tau_u(\mathfrak{G}). && (\text{definição de } \iota) \end{aligned}$$

Assim, pela anti-simetria de  $\subset$ ,  $\tau_u(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$  e  $\mathfrak{G}$  é i.t. □

Os operadores invariantes por translação têm a seguinte propriedade.

**Proposição 6.16** (invariância por translação do domínio de invariância) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\psi$  um operador invariante por translação sobre  $\mathcal{P}(E)$  então seu domínio de invariância  $\text{Inv}(\psi)$  é invariante por translação. □

**Prova** – Para todo  $u \in E$  e todo  $B \in \text{Inv}(\psi)$ ,

$$\begin{aligned} \psi(\tau_u(B)) &= \psi\tau_u(B) && (\text{definição de composto}) \\ &= \tau_u\psi(B) && (\psi \text{ é i.t.}) \\ &= \tau_u(\psi(B)) && (\text{definição de composto}) \\ &= \tau_u(B), && (B \in \text{Inv}(\psi)) \end{aligned}$$

isto é,  $\tau_u(B) \in \text{Inv}(\psi)$ . Em outros termos, para todo  $u \in E$ ,  $\tau_u(\text{Inv}(\psi)) \subset \text{Inv}(\psi)$ . Pelo resultado do Exercício 6.6, isto prova que  $\text{Inv}(\psi)$  é i.t. □

As aberturas e os fechamentos por uma subcoleção invariante por translação têm a seguinte propriedade.

**Proposição 6.17** (invariância por translação das aberturas e dos fechamentos por uma subcoleção invariante por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção invariante por translação de  $\mathcal{P}(E)$  então  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\phi_{\mathfrak{B}}$  são invariantes por translação. □

**Prova** – Para todo  $u \in E$  e todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \tau_u\gamma_{\mathfrak{B}}(X) &= \tau_u(\gamma_{\mathfrak{B}}(X)) && (\text{definição de composto}) \\ &= \tau_u(\sup\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\}) && (\text{definição de } \gamma_{\mathfrak{B}}) \\ &= \sup\tau_u(\{B \in \mathfrak{B} : B \subset X\}) && (\tau_u \text{ é uma dilatação}) \\ &= \sup\{Y \in \mathcal{P} : \exists B \in \mathfrak{B}, \tau_u(B) = Y \text{ e } B \subset X\} && (\text{definição de imagem}) \\ &= \sup\{Y \in \mathcal{P} : \exists B \in \mathfrak{B}, \tau_u(B) = Y \text{ e } \tau_u(B) \subset \tau_u(X)\} && (\tau_u \text{ é um automorfismo}) \\ &= \sup\{Y \in \tau_u(\mathfrak{B}) : Y \subset \tau_u(X)\} && (\text{definição de imagem}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup\{Y \in \mathfrak{B} : Y \subset \tau_u(X)\} && (\mathfrak{B} \text{ é i.t.}) \\
 &= \gamma_{\mathfrak{B}}(\tau_u(X)) && (\text{definição de } \gamma_{\mathfrak{B}}) \\
 &= \gamma_{\mathfrak{B}}\tau_u(X), && (\text{definição de composto})
 \end{aligned}$$

isto é, para todo  $u \in E$ ,  $\tau_u\gamma_{\mathfrak{B}} = \gamma_{\mathfrak{B}}\tau_u$ . Em outros termos,  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é i.t.

A prova que  $\phi_{\mathfrak{B}}$  é similar. □

Junto com a caracterização já feita das aberturas, as proposições acima permitem caracterizar as aberturas invariantes por translação.

**Proposição 6.18** (caracterização das aberturas invariantes por translação) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\Gamma'$  o conjunto das aberturas invariantes por translação sobre  $\mathfrak{P}(E)$ . O mapeamento de  $\Gamma'$  no subconjunto de  $\mathcal{Y}(\mathfrak{P}(E))$  das subcoleções invariantes por translação,

$$\gamma \mapsto \text{Inv}(\gamma)$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$\mathfrak{B} \mapsto \gamma_{\mathfrak{B}}.$$

□

**Prova** – Pela Proposição 6.5, sabemos que  $\gamma \mapsto \gamma_{\mathfrak{B}}$  é uma bijeção de  $\Gamma$  em  $\mathcal{Y}(\mathfrak{P})$ . Basta então observar que, pela Proposição 6.16, para todo  $\gamma \in \Gamma'$ ,  $\text{Inv}(\gamma)$  é i.t., e que, pela Proposição 6.17, para todo  $\mathfrak{B} \in \mathcal{Y}(\mathfrak{P})$  e i.t.,  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  é i.t. □

Em relação aos fechamentos, temos um resultado dual. O mapeamento de  $\Phi'$ , o conjunto dos fechamentos invariantes por translação sobre  $\mathfrak{P}(E)$ , no subconjunto de  $\mathcal{Y}(\mathfrak{P}(E))$  das subcoleções invariantes por translação, dado por  $\phi \mapsto \text{Inv}(\phi)$  é uma bijeção e seu inverso é  $\mathfrak{B} \mapsto \phi_{\mathfrak{B}}$ .

Vamos agora considerar o caso de aberturas e fechamentos morfológicos invariantes por translação.

Por definição, uma conexão de Galois  $(\epsilon, \delta)$  é *invariante por translação* (i.t.) se e somente se  $\epsilon$  e  $\delta$  são invariantes por translação. Neste caso,  $\delta\epsilon$  e  $\epsilon\delta$  são, respectivamente, uma abertura e um fechamento, invariantes por translação como compostos de operadores invariantes por translação.

**Definição 6.6** (abertura e fechamento morfológico i.t.) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $(\epsilon, \delta)$  uma conexão de Galois entre  $(\mathfrak{P}(E), \supset)$  e  $(\mathfrak{P}(E), \subset)$ , invariante por translação. O operador  $\delta\epsilon$  chama-se de *abertura morfológica i.t.* O operador  $\epsilon\delta$  chama-se de *fechamento morfológico i.t.* □

Observamos que as aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) i.t. da Definição 6.6 são também aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) conforme a Definição 6.4, mas nada prova que as aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) da Definição 6.4, *invariantes por translação*, sejam também aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) i.t. conforme a Definição 6.6.

Toda abertura morfológica (resp. fechamento morfológico) i.t. é uma abertura algébrica (resp. fechamento algébrico) invariante por translação. O contrário geralmente não vale, mas pela Proposição 7.1.3 de [Mather75] sabemos que toda abertura algébrica invariante por translação pode se escrever como a união de aberturas morfológicas i.t. Afim de apresentar e provar, até o fim desta seção, o resultado do Matheron, vamos introduzir mais um fechamento sobre as subcoleções de  $\mathfrak{P}(E)$ , assim como a definição de aberturas e fechamentos por um elemento estruturante.

Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção qualquer de  $\mathfrak{P}$ . A *subcoleção invariante por translação gerada por  $\mathfrak{B}$*  é a subcoleção de  $\mathfrak{P}$ , denotada  $\langle \mathfrak{B} \rangle$  e dada por

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{X \in \mathfrak{P} : \exists u \in E \text{ e } \exists B \in \mathfrak{B}, B + u = X\}.$$



Vamos mostrar que  $\langle \mathfrak{B} \rangle$  é realmente uma subcoleção invariante por translação. Para todo  $u \in E$  e todo  $Y \in \mathfrak{P}$ ,

$$\begin{aligned} Y \in \tau_u(\langle \mathfrak{B} \rangle) &\Leftrightarrow \exists X \in \langle \mathfrak{B} \rangle, \tau_u(X) = Y && \text{(definição de imagem)} \\ &\Leftrightarrow \exists X \in \mathfrak{P}, \exists v \in E \text{ e } \exists B \in \mathfrak{B}, \tau_v(B) = X \text{ e } \tau_u(X) = Y && \text{(definição de } \langle \mathfrak{B} \rangle \text{)} \\ &\Leftrightarrow \exists v \in E \text{ e } \exists B \in \mathfrak{B}, \tau_u(\tau_v(B)) = Y && \text{(implicação lógica)} \\ &\Rightarrow \exists w \in E \text{ e } \exists B \in \mathfrak{B}, \tau_w(B) = Y && (w = u + v \text{ e propriedade da translação)} \\ &\Leftrightarrow Y \in \langle \mathfrak{B} \rangle, && \text{(definição de } \langle \mathfrak{B} \rangle \text{)} \end{aligned}$$

isto é, para todo  $u \in E$ ,  $\tau_u(\langle \mathfrak{B} \rangle) \subset \langle \mathfrak{B} \rangle$ . Em outros termos, pelo Exercício 6.6,  $\langle \mathfrak{B} \rangle$  é uma subcoleção invariante por translação.

Vamos provar que se  $\mathfrak{B}$  é uma subcoleção invariante por translação, então  $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathfrak{B}$ . Para todo  $X \in \mathfrak{P}$ ,

$$\begin{aligned} X \in \langle \mathfrak{B} \rangle &\Leftrightarrow \exists u \in E \text{ e } \exists B \in \mathfrak{B}, B + u = X && \text{(definição de } \langle \mathfrak{B} \rangle \text{)} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{B}, && (\mathfrak{B} \text{ é i.t.}) \end{aligned}$$

isto é,  $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathfrak{B}$ .

A noção de subcoleção invariante por translação gerada, conduz a definição do seguinte fechamento sobre  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P})$ .

**Exercício 6.7** (fechamento das subcoleções de subconjuntos) – Seguindo o roteiro da prova da Proposição 6.10, prove que o mapeamento de  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P})$  em  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P})$ ,  $\mathfrak{B} \mapsto \langle \mathfrak{B} \rangle$  é um fechamento.  $\square$

Seja  $E$  um grupo Abelian. Dado um subconjunto  $A$  de  $E$ , a *abertura por  $A$*  é a abertura morfológica i.t. sobre  $\mathfrak{P}$ , denotado  $\gamma_A$  e dado por

$$\gamma_A = \delta_A \varepsilon_A,$$

e o *fechamento por  $A$*  é o fechamento morfológico i.t. sobre  $\mathfrak{P}$ , denotado  $\phi_A$  e dado por

$$\phi_A = \varepsilon_A \delta_A.$$

O subconjunto  $A$ , chama-se *elemento estruturante*.

A Figura 6.7 mostra uma abertura por um elemento estruturante  $A$  e a obtenção da abertura por  $A$  de um determinado subconjunto  $X$ .

Pela definição de  $\langle \mathfrak{B} \rangle$ , observamos que  $\langle \{A\} \rangle = \{B \in \mathfrak{P} : \exists y \in E, A + y = B\}$ .

**Proposição 6.19** (domínio de invariância de uma abertura por um elemento estruturante) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\gamma_A$  a abertura pelo elemento estruturante  $A$  de  $\mathfrak{P}(E)$ , então

$$\text{Inv}(\gamma_A) = \overline{\langle \{A\} \rangle}. \quad \square$$

**Prova** – Seja  $\gamma_A$  a abertura por  $A$ ,

$$\begin{aligned} \text{Inv}(\gamma_A) &= \overline{\{B \in \mathfrak{P} : \exists y \in E, A + y = B\}} && \text{(Exercício 6.4)} \\ &= \overline{\langle \{A\} \rangle}. && \text{(definição de } \langle \mathfrak{B} \rangle \text{)} \end{aligned} \quad \square$$

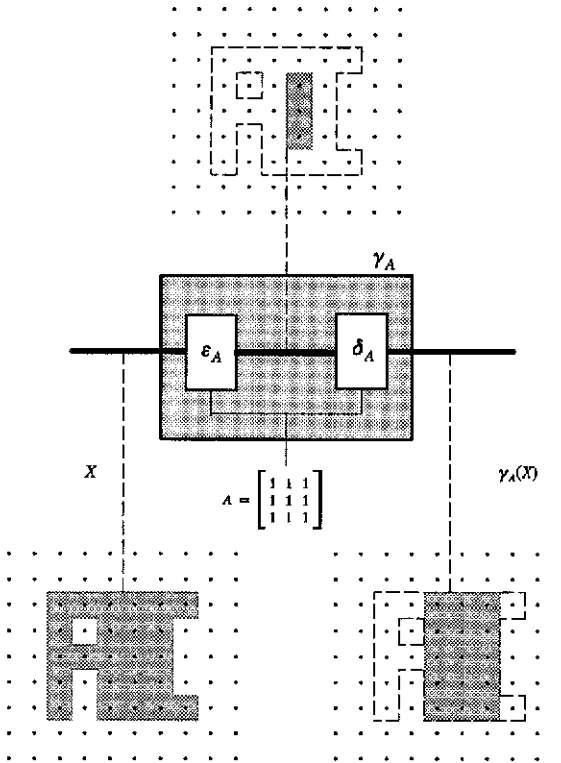


Fig. 6.7 – Abertura morfológica i.t. de um subconjunto.

Uma base para  $\text{Inv}(\gamma_A)$  é a subcoleção  $\langle A \rangle$ . Assim, pela Proposição 6.11, temos  $\gamma_A = \gamma_{\langle A \rangle}$  e conseqüentemente

$$\gamma_A(X) = \bigcup_{y \in E \text{ e } A + y \subset X} A + y \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

A Figura 6.8 mostra um modo de construir a abertura por  $A$  do subconjunto  $X$  da Figura 6.7, usando a expressão  $\gamma_A(X)$  acima. O aberto é obtido “pintando” com um pincel possuindo a forma do elemento estruturante (aqui um quadrado) e mantendo o pincel dentro do  $X$ . A Figura 6.9 mostra a abertura invariante por translação do subconjunto  $X$  que “toca as bordas do domínio”.

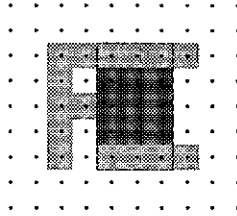


Fig. 6.8 – Modo de construir o aberto.

A Figura 6.10 mostra um fechamento por um elemento estruturante  $A$  e a obtenção do fechamento por  $A$  de um determinado subconjunto  $X$ . A Figura 6.11 mostra um modo de construir o fechamento por  $A$  do subconjunto  $X$ . O complementar do fechado é obtido “pintando” com um pincel possuindo a forma do elemento estruturante (aqui um quadrado) e mantendo o pincel dentro do  $X^c$ .

As Figuras 6.12 e 6.13 mostram os efeitos, respectivamente, de uma abertura e de um fechamento sobre um mesmo subconjunto  $X$  por um elemento estruturante 3 por 3. Este subconjunto pode ser interpretado como representando um continente e seu complementar o oceano. Na abertura, observamos (de cima para baixo) a quebra de um istmo estreito (isto é, de largura inferior ao lado do elemento estruturante), a eliminação de um cabo estreito e de uma ilha pequena e, finalmente, a *abertura* de uma lagoa beirando o litoral. No fechamento, observamos (de cima para baixo) a criação de um istmo entre uma ilha beirando o litoral, a eliminação de um golfo estreito e de um lago pequeno e, finalmente, o *fechamento* de uma baía de acesso estreito junto ao oceano.

Para todo  $B \in \langle \{A\} \rangle$ ,  $\langle \{B\} \rangle = \langle \{A\} \rangle e$ , conseqüentemente,  $\gamma_B = \gamma_A$ . Isto mostra que na definição de uma abertura ou de um fechamento por um elemento estruturante, a posição relativa entre o elemento estruturante e a origem não importa. Por esta razão, na notação de elemento estruturante para as aberturas e fechamentos, podemos esquecer de indicar a posição da origem.

Na proposição seguinte, vamos resumir algumas propriedades das aberturas por um elemento estruturante.

**Proposição 6.20** (propriedades das aberturas por um elemento estruturante) – Seja  $B$  um subconjunto de um grupo Abeliano  $E$ . Seja  $\gamma_B$  a abertura pelo elemento estruturante  $B$ , isto é,

$$\gamma_B(X) = (X \ominus B) \oplus B \quad (X \in \mathcal{P})$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo  $B, B_1$  e  $B_2$  em  $\mathcal{P}$ ,

$$(1) \gamma_B(X) = \bigcup_{x \in E \text{ e } B+x \subset X} B+x \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$(2) X_1 \subset X_2 \Rightarrow \gamma_B(X_1) \subset \gamma_B(X_2) \quad (X_1, X_2 \in \mathcal{P}) \quad (\text{isotonia})$$

$$(3) \gamma_B \leq \iota \quad (\text{anti-extensividade})$$

$$(4) \gamma_B \gamma_B = \gamma_B \quad (\text{idempotência})$$

$$(5) \text{Inv}(\gamma_B) = \delta_B(\mathcal{P}). \quad (\text{domínio de invariância})$$

- (6)  $\gamma_B(\sup \mathfrak{S}) = \sup \gamma_B(\mathfrak{S})$  ( $\mathfrak{S} \subset \delta_B(\mathfrak{P})$ ) (propriedade dos abertos)  
 (7)  $\gamma_B(\inf \mathfrak{S}) \subset \inf \gamma_B(\mathfrak{S})$  ( $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}$ ) (isotonia)  
 (8)  $\tau_u \gamma_B = \gamma_B \tau_u$  ( $u \in E$ ) (invariância por translação)  
 (9)  $\gamma_{B_1} \vee \gamma_{B_2} = \gamma_{\langle B_1, u \langle B_2 \rangle}$  (sup-fechamento)  
 (10)  $\gamma_{\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle} \leq \gamma_{B_1} \wedge \gamma_{B_2}$   $\square$

**Prova** – A Propriedade (1) decorre da aplicação do resultado do Exercício 6.3 ao caso invariante por translação ou ainda é uma consequência da Proposição 6.19.

As Propriedades (2) a (4) decorrem da Proposição 6.13.

A Propriedade (5) é o resultado da Proposição 6.14.

A Propriedade (6) decorre da Proposição 6.2.

A Propriedade (7) decorre da isotonia de  $\gamma_B$  e da Proposição 3.1.

A Propriedade (8) decorre do fato que a operação de composição é fechada em relação aos operadores invariantes por translação.

As Propriedades (9) e (10) decorrem da Proposição 6.1.  $\square$

A Figura 6.14 ilustra a Propriedade (6), isto é, a união de aberto é aberto. A Figura 6.15 ilustra a Propriedade (7), isto é, a abertura da interseção de dois subconjuntos é contida na interseção de suas aberturas. A abertura por  $A$  da interseção de  $X_1$  e  $X_2$  é o ínfimo de  $\{X_1, X_2\}$  relativamente a coleção  $\langle \{A\} \rangle$ . Nesta figura os subconjuntos  $X_1$  e  $X_2$  são abertos, então sua interseção coincide com a interseção de suas aberturas (mas não coincide com a abertura da interseção).

Na proposição seguinte, vamos resumir algumas propriedades dos fechamentos por um elemento estruturante.

**Proposição 6.21** (propriedades dos fechamentos por um elemento estruturante) – Seja  $B$  um subconjunto de um grupo Abeliano  $E$ . Seja  $\phi_B$  o fechamento pelo elemento estruturante  $B$ , isto é,

$$\phi_B(X) = (X \oplus B) \ominus B \quad (X \in \mathfrak{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo  $B, B_1$  e  $B_2$  em  $\mathfrak{P}$ ,

- (1)  $\phi_B(X) = \bigcap_{x \in E \text{ e } B+x \subset X^c} (B+x)^c$  ( $X \in \mathfrak{P}$ )  
 (2)  $X_1 \subset X_2 \Rightarrow \phi_B(X_1) \subset \phi_B(X_2)$  ( $X_1, X_2 \in \mathfrak{P}$ ) (isotonia)  
 (3)  $\iota \leq \phi_B$  (extensividade)  
 (4)  $\phi_B \phi_B = \phi_B$  (idempotência)  
 (5)  $\text{Inv}(\phi_B) = \varepsilon_B(\mathfrak{P})$  (domínio de invariância)  
 (6)  $\phi_B(\inf \mathfrak{S}) = \inf \phi_B(\mathfrak{S})$  ( $\mathfrak{S} \subset \varepsilon_B(\mathfrak{P})$ ) (propriedade dos fechados)  
 (7)  $\sup \phi_B(\mathfrak{S}) \subset \phi_B(\sup \mathfrak{S})$  ( $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}$ ) (isotonia)  
 (8)  $\tau_u \phi_B = \phi_B \tau_u$  ( $u \in E$ ) (invariância por translação)  
 (9)  $\phi_{B_1} \wedge \phi_{B_2} = \phi_{\langle B_1, u \langle B_2 \rangle}$  (inf-fechamento)  
 (10)  $\phi_{B_1} \vee \phi_{B_2} \leq \phi_{\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle}$   $\square$

**Prova** – A prova das propriedades dos fechamentos decorrem das provas das propriedades das aberturas, por dualidade.  $\square$

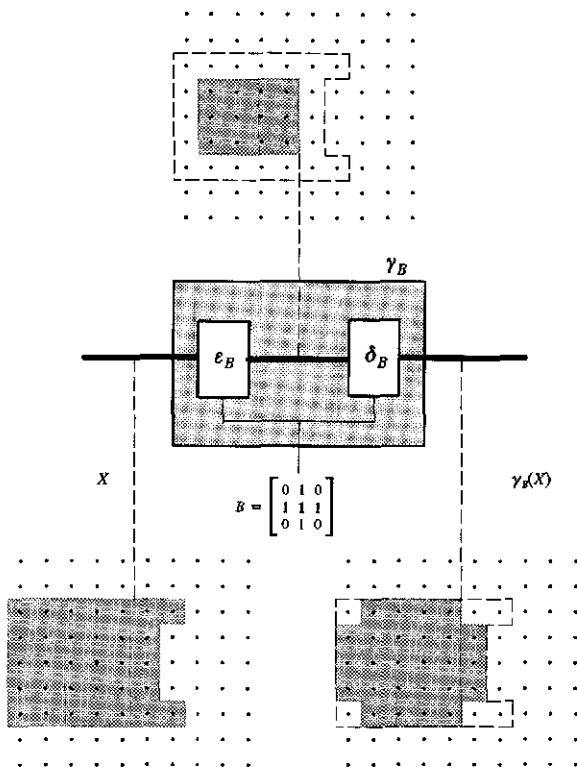


Fig. 6.9 – Abertura morfológica i.t. de um subconjunto que “toca as bordas do domínio”.

Observamos que se  $X$  é um conjunto de subcoleções invariantes por translação então  $\bigcup_{\mathfrak{B} \in X} \mathfrak{B}$  e

$\bigcap_{\mathfrak{B} \in X} \mathfrak{B}$  são subcoleções invariantes por translação.

Para toda subcoleção  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{P}$ ,  $\overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é uma subcoleção sup-fechada e invariante por translação. Em outros termos, a imagem de  $\mathcal{P}(\mathcal{P})$  através de  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é contida no conjunto das subcoleções sup-fechadas e invariantes por translação.

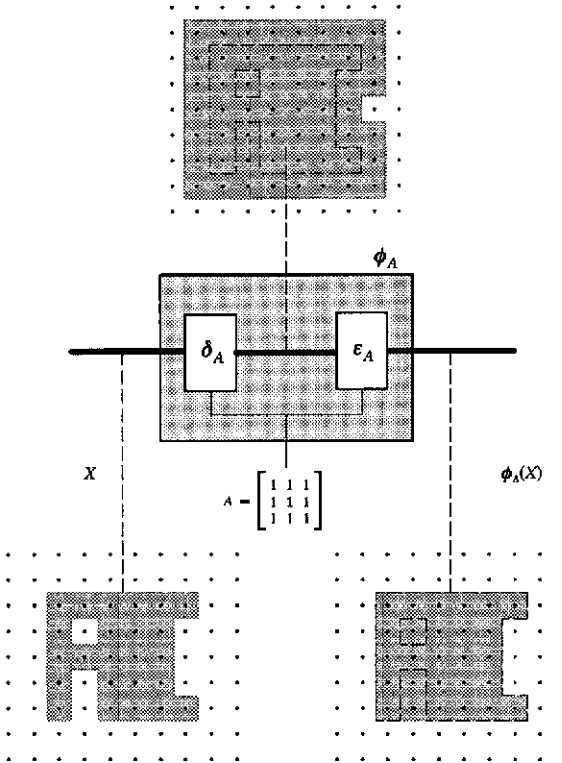


Fig. 6.10 – Fechamento morfológico de um subconjunto.

Vamos provar que se  $\mathfrak{B}$  é uma subcoleção sup-fechada e invariante por translação, então  $\overline{\langle \mathfrak{B} \rangle} = \mathfrak{B}$ . Temos,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle} &= \overline{\mathfrak{B}} && (\mathfrak{B} \text{ é i.t.}) \\ &= \mathfrak{B}. && (\mathfrak{B} \text{ é sup-fechado}) \end{aligned}$$

Em outros termos, se  $\mathfrak{B}$  é uma subcoleção sup-fechada e invariante por translação, então é um invariante no mapeamento  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$ .

Geralmente, o composto de aberturas (resp. fechamento) não é uma abertura (resp. fechamento). No entanto, a composição do fechamento  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$  pelo fechamento  $\mathfrak{B} \mapsto \langle \mathfrak{B} \rangle$  é um fechamento.

**Proposição 6.22** (fechamento das subcoleções de subconjuntos) – Seja  $E$  um grupo Abeliano. O mapeamento de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  em  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ ,  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é um fechamento.  $\square$

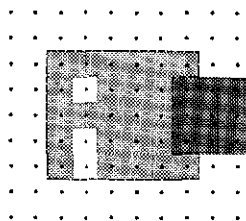


Fig. 6.11 – Modo de construir o fechado.

**Prova** – O mapeamento  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é isotônico e extensivo como resultado da composição de mapeamentos isotônicos e extensivos. Vamos provar a idempotência. Para todo  $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$ ,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle} \rangle} &= \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle} && (\overline{\langle \mathfrak{B} \rangle} \text{ é i.t.}) \\ &= \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}, && (\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle} \text{ é idempotente}) \end{aligned}$$

isto é,  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é idempotente.

Em outros termos,  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é um fechamento.  $\square$

Para provar o resultado do Matheron, precisamos de uma última proposição.

**Proposição 6.23** (domínio de invariância da união de aberturas por elementos estruturantes) – Seja  $E$  um grupo Abelian. Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção qualquer de  $\mathcal{P}(E)$ , então

$$\text{Inv}\left(\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B\right) = \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}. \quad \square$$

**Prova** – Para todo  $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$ ,

$$\begin{aligned} \text{Inv}\left(\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B\right) &= \overline{\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \text{Inv}(\gamma_B)} && (\text{Proposições 6.6 e 6.10}) \\ &= \overline{\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\langle \{B\} \rangle}} && (\text{Proposição 6.19}) \\ &= \overline{\langle \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\langle \{B\} \rangle} \rangle} && (\overline{\langle \{B\} \rangle} \text{ é i.t.}) \\ &= \overline{\langle \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \{B\} \rangle} && (\text{Exercício 6.1}) \\ &= \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}. && (\text{representação de } \mathfrak{B} \text{ por uma união de singletons}) \quad \square \end{aligned}$$

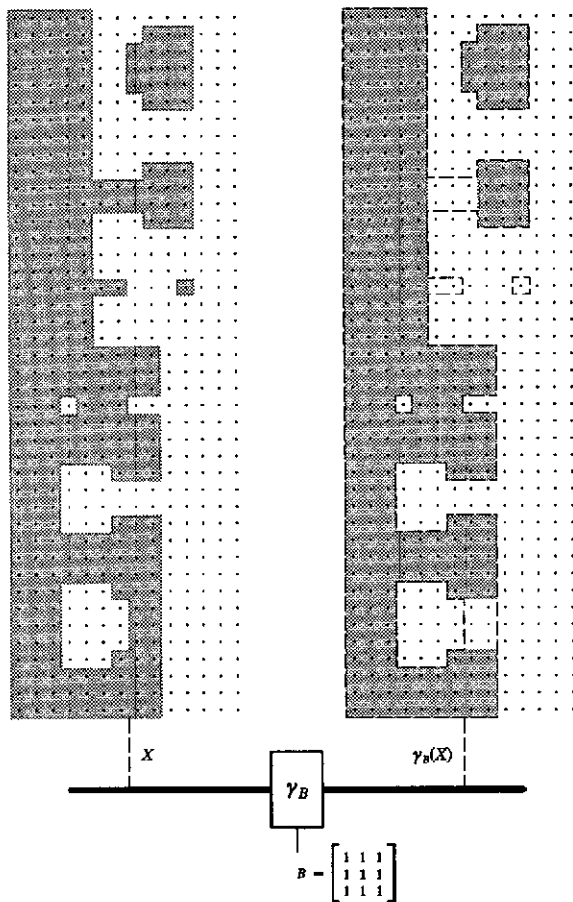


Fig. 6.12 – Efeitos da abertura.



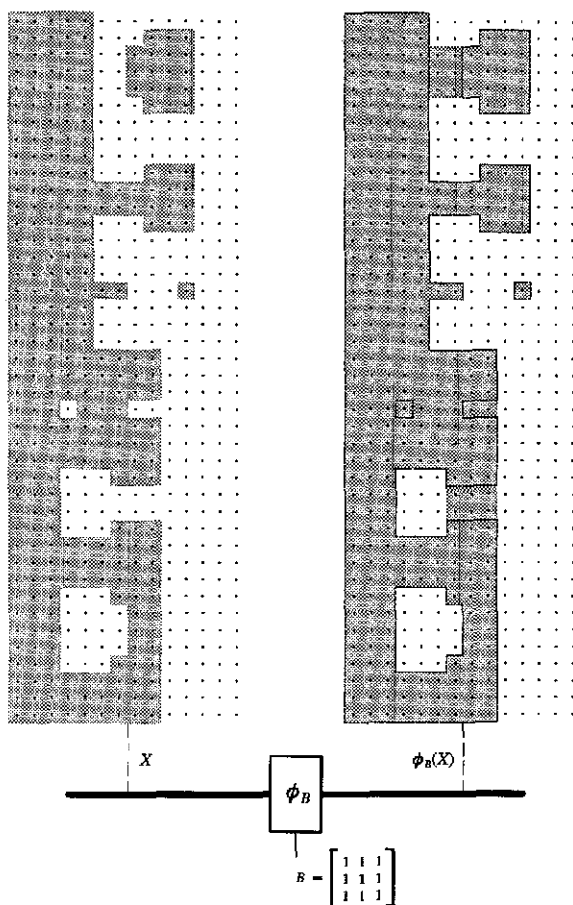


Fig. 6.13 – Efeitos do fechamento.

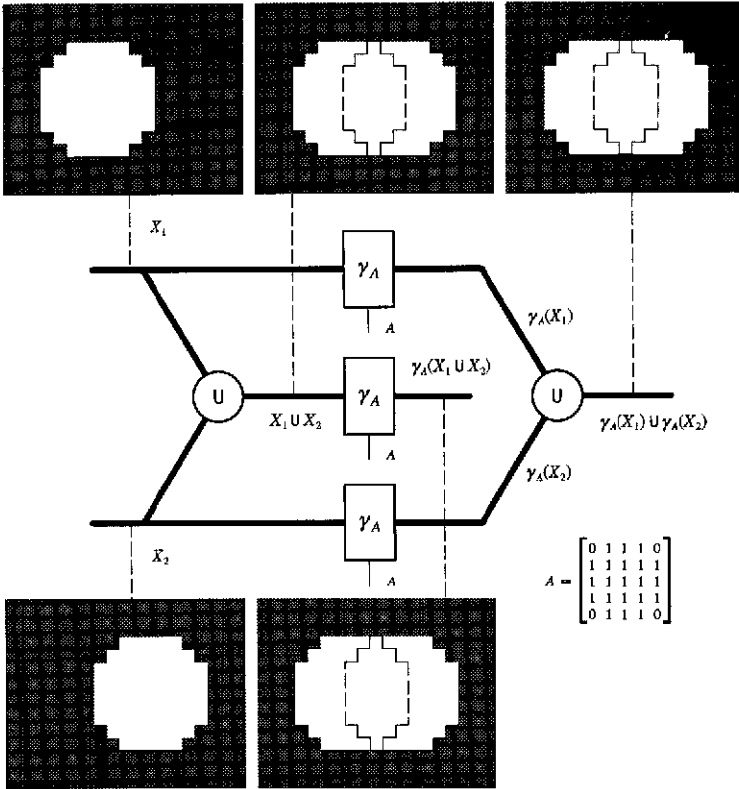


Fig. 6.14 – Propriedade da união de abertos.

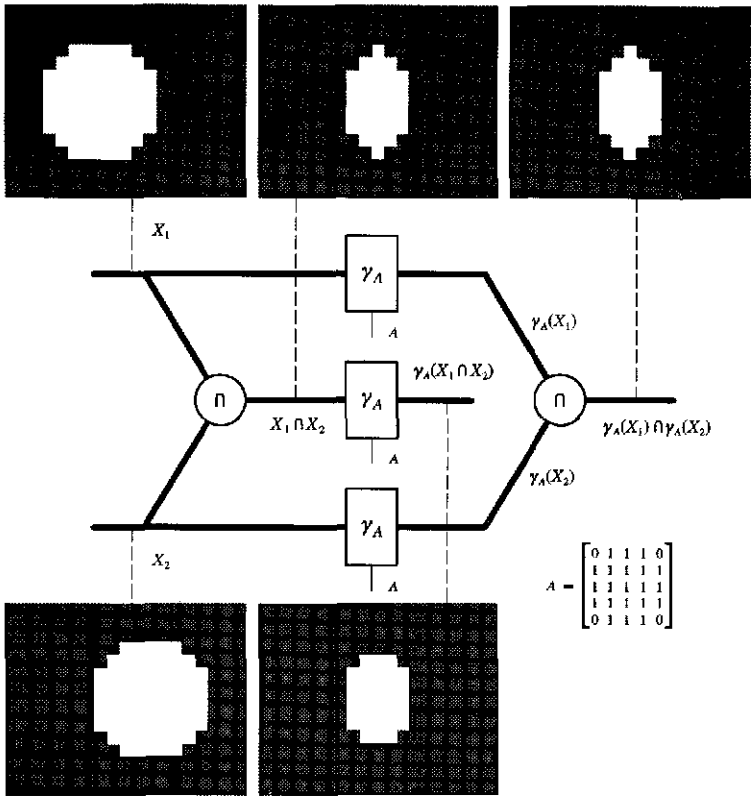


Fig. 6.15 – Isotonia da abertura.

Podemos agora enunciar e provar o resultado do Matheron.

**Proposição 6.24** (representação das aberturas invariantes por translação) – Seja  $E$  um grupo Abeliano. Seja  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$  e seja  $\gamma$  o operador sobre  $\mathcal{P}(E)$  dado por

$$\gamma = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B.$$

então

$$\gamma \in \Gamma' \text{ e } \text{Inv}(\gamma) = \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}.$$

Inversamente, seja  $\gamma$  uma abertura invariante por translação, isto é,  $\gamma \in \Gamma'$  então

$$\exists \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(E), \gamma = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B. \quad \square$$

**Prova** – Para toda subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$ , pela Proposição 6.1, o operador  $\gamma = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B$  é uma abertura representada como uma união de aberturas. Ele é um operador i.t. representado como uma união de operadores i.t. Isto é,  $\gamma \in \Gamma'$ . Pela Proposição 6.23,  $\text{Inv}(\gamma) = \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$ .

Inversamente, para toda abertura i.t.  $\gamma$ , pela Proposição 6.2,  $\text{Inv}(\gamma)$  é sup-fechado e pela Proposição 6.16,  $\text{Inv}(\gamma)$  é i.t. Isto é,  $\text{Inv}(\gamma)$  é um invariante no mapeamento  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$ . Pela Proposição 6.22,  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  é um fechamento, então  $\text{Inv}(\gamma)$  pertence a imagem de  $\mathcal{P}(\mathcal{P})$  através de  $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$ . Em outros termos, por alguma subcoleção  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{P}(E)$   $\text{Inv}(\gamma) = \overline{\langle \mathfrak{B} \rangle}$  ou, ainda, pelas Proposições 6.5 e 6.23,

$$\gamma = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B. \quad \square$$

A Figura 6.16 ilustra uma aplicação de uma abertura (algébrica) invariante por translação obtida como união de duas aberturas por dois elementos estruturantes distintos. Nesta figura, observamos que com esta abertura podemos extrair da imagem  $X$  as partes alongadas verticalmente e inclinadas a 45 graus.

## 6.4 Aberturas e fechamentos condicionalmente invariantes por translação

Em certas aplicações, as aberturas e os fechamentos invariantes por translação podem apresentar efeitos de bordas indesejáveis porque num ponto  $x$  de “borda” de  $E$  o elemento estruturante transladado  $B + x$  geralmente cobre simultaneamente as imediações da “borda” considerada e da “borda oposta”. Na prática, usa-se então, aberturas e fechamentos que têm um comportamento similar aos operadores i.t. no “centro” de  $E$  e que nunca tem o efeito de “juntar” as “bordas opostas”.

Seja  $(\mathbb{Z}^2, +)$  o grupo Abeliano de pares ordenados de inteiros e seja  $E$  um retângulo de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definição 6.7** (abertura e fechamento condicionalmente invariantes por translação) – Uma *abertura* (resp. *fechamento*) *condicionalmente invariante por translação* (c.i.t) é uma abertura (morfológica)  $\gamma_b$  (resp. fechamento (morfológico)  $\phi_b$ ) por uma função estruturante  $b$  condicionalmente invariantes por translação.  $\square$

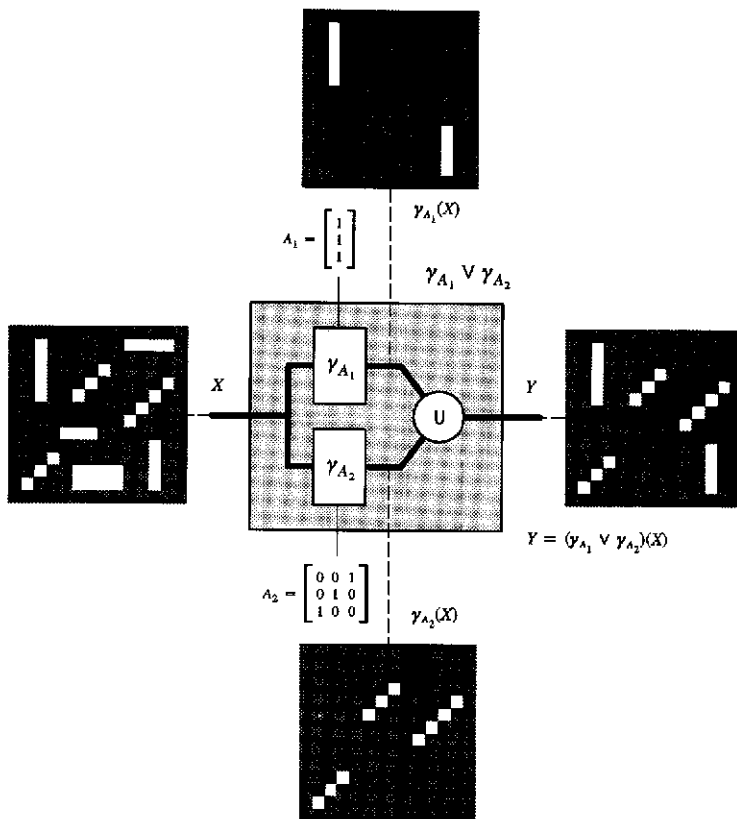


Fig. 6.16 - Abertura algébrica.

Como já comentamos na Seção 4.4, cada função c.i.t. pode ser caracterizado por um subconjunto  $B$  de  $E \oplus E^t$ . Para todo  $B \in \mathcal{P}(E \oplus E^t)$ , denotamos por  $b_B$  a função c.i.t. definida por

$$b_B(y) = (B + y) \cap E \quad (y \in E).$$

Denotamos então por  $\gamma_B$  (resp.  $\phi_B$ ) a abertura (resp. fechamento) c.i.t. por  $b_B$ .

Em outros termos, temos  $\gamma_B = \delta_B \epsilon_B$  e  $\phi_B = \epsilon_B \delta_B$ , onde  $\delta_B$  e  $\epsilon_B$  são a dilatação e a erosão c.i.t. por  $B$ .

A Figura 6.17 mostra uma abertura morfológica c.i.t. por translação pelo losângulo  $3 \times 3$  (a cruz). Comparando as Figuras 6.9 e 6.17, observamos que a abertura c.i.t. ao contrário da abertura i.t. não altera a parte do subconjunto que “toca a borda do domínio”. No caso invariante por translação, todos os pontos  $X$  são tratados igualmente, quer sejam “pontos de bordas ou não”. Dependendo da aplicação, pode-se preferir uma ou outra abertura.

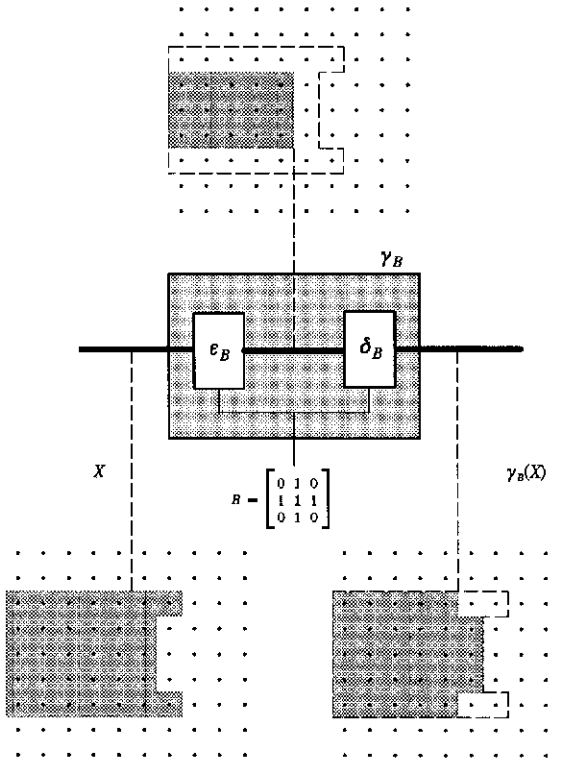


Fig. 6.17 – Abertura morfológica c.i.t. de um subconjunto que “toca as bordas do domínio”.

# Capítulo 7

## Topologia Digital

A *Topologia Digital* estuda a aplicação das noções definidas em Topologia sobre imagens binárias. Neste capítulo vamos introduzir algumas noções básicas de Topologia Digital, tais como conexidade, buraco, pontos isolados, bordas, árvores de adjacência, homotopia, etc.

Existem várias formas de apresentar os conceitos de Topologia Digital. Uma das mais conhecidas consiste em estabelecer a noção de *adjacência* entre pontos e, a partir desta definição, construir os demais conceitos e propriedades [KonRos89].

Aqui, introduzimos a Topologia Digital a partir da noção de *espaço morfológico*, que se apresenta como uma simplificação da noção de espaço topológico.

### 7.1 Conexidade

No capítulo anterior deu-se o nome de abertos aos invariantes de uma abertura. De uma maneira equivalente pode-se dar o nome de aberto aos subconjuntos de uma coleção sup-fechada (Proposição 3.9), desde que a coleção dos invariantes de uma abertura é sup-fechada (Proposição 6.2). Estes abertos, que chamaremos de *morfológicos*, diferem dos abertos de uma topologia como se pode verificar a partir das seguintes definições que incluem a de *morfologia*.

**Definição 7.1** (morfologia, abertos morfológicos e espaço morfológico) – Uma *morfologia*  $\mathcal{M}$  num conjunto  $E$  é uma subcoleção sup-fechada de  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ . Os subconjuntos em  $\mathcal{M}$  chamam-se de *abertos (morfológicos) segundo*  $\mathcal{M}$ . Em particular,  $\emptyset$  e  $E$  são abertos (morfológicos). Um *espaço morfológico* é um par  $(E, \mathcal{M})$  onde  $E$  é um conjunto e  $\mathcal{M}$  é uma morfologia em  $E$ .  $\square$

Quando não houver dúvida sobre a morfologia  $\mathcal{M}$  em  $E$  usada, no lugar de dizer que o subconjunto  $A$  de  $E$  é um aberto segundo a morfologia  $\mathcal{M}$ , diremos simplesmente que  $A$  é um aberto (morfológico) em  $E$  e que  $E$  é um espaço morfológico.

**Definição 7.2** (topologia, abertos topológicos e espaço topológico) – Uma *topologia*  $\mathcal{T}$  num conjunto  $E$  é uma morfologia em  $E$  tal que a interseção de dois subconjuntos em  $\mathcal{T}$  é um subconjunto em  $\mathcal{T}$ . Os subconjuntos em  $\mathcal{T}$  chamam-se de *abertos (topológicos) segundo*  $\mathcal{T}$ . Em particular,  $\emptyset$  e  $E$  são abertos (topológicos). Um *espaço topológico* é um par  $(E, \mathcal{T})$  onde  $E$  é um conjunto e  $\mathcal{T}$  é uma topologia em  $E$ .  $\square$

Das definições acima, concluímos que todo espaço topológico é também um espaço morfológico. Mas, nem todo espaço morfológico é um espaço topológico. Ou ainda, todo aberto topológico segundo uma topologia  $\mathcal{T}$  é também um aberto morfológico segundo  $\mathcal{T}$ . Mas, nem todo aberto morfológico segundo uma morfologia  $\mathcal{M}$  é também um aberto topológico segundo  $\mathcal{M}$ .

Por exemplo, sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $E$  tais que  $A \cup B = E$ . Então, a subcoleção  $\mathcal{M} = \{\emptyset, A, B, E\}$  é uma morfologia em  $E$ . Os subconjuntos  $\emptyset, A, B$  e  $E$  são *abertos morfológicos segundo*  $\mathcal{M}$ . A subcoleção  $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, B, A \cap B, E\}$  é uma topologia no conjunto  $E$ . Os subconjuntos  $\emptyset, A, B, A \cap B$  e  $E$  são *abertos topológicos* (e também morfológicos) *segundo*  $\mathcal{T}$ .

Um *fechado (morfológico) segundo uma morfologia* (resp. *fechado (topológico) segundo uma topologia*) é o complemento de um aberto segundo esta morfologia (resp. topologia).

**Exercício 7.1** (propriedade dos fechados morfológicos) – Mostre que os fechados morfológicos em  $E$  formam uma subcoleção *inf-fechada* de  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  (i.e., uma *família de Moore*). Em particular, mostre que  $\emptyset$  e  $E$  são fechados morfológicos.  $\square$

A noção de morfologia é importante porque a partir dela podemos construir a definição de conexidade morfológica, diretamente inspirada da conexidade em topologia.

Inicialmente, é bom observar que um subconjunto de um espaço morfológico  $E$  pode ser simultaneamente aberto e fechado. Por exemplo os subconjuntos  $\emptyset$  e  $E$  são sempre morfológicamente abertos e fechados. Segundo a morfologia  $\mathcal{P}(E)$ , todo subconjunto de  $E$  é morfológicamente aberto e fechado, desde que todo subconjunto e seu complemento pertencem à  $\mathcal{P}(E)$ . Esta observação leva à noção de conexidade.

**Definição 7.3** (espaço morfológico conexo) – Um espaço morfológico  $(E, \mathcal{M})$  é *conexo segundo*  $\mathcal{M}$  quando  $\emptyset$  e  $E$  são os dois únicos subconjuntos de  $E$  abertos e fechados.  $\square$

Quando não houver dúvida sobre a morfologia  $\mathcal{M}$  em  $E$  usada, diremos simplesmente que  $E$  é um espaço (morfológico) conexo.

A idéia de um conjunto conexo é a de um conjunto formado por partes não disjuntas, é o que esclarece a seguinte proposição.

**Proposição 7.1** (definição equivalente de espaço conexo) – Um espaço morfológico  $(E, \mathcal{M})$  é *conexo segundo*  $\mathcal{M}$  se e somente se *não* existem dois abertos segundo  $\mathcal{M}$ ,  $A$  e  $B$ , disjuntos e não vazios, tal que  $E = A \cup B$ .  $\square$

**Prova** – Seja  $(E, \mathcal{M})$  um espaço morfológico, então

$E$  é não conexo segundo  $\mathcal{M} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P}(E) - \{\emptyset, E\}$ , aberto e fechado segundo  $\mathcal{M}$   
(definição de espaço morfológico conexo)

$\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{M} - \{\emptyset\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e  $E = A \cup B$ .

( $B = A^c$ , definição de fechado segundo  $\mathcal{M}$  e complementaridade provam  $\Rightarrow$ )

( $A = B^c$  e definição de fechado segundo  $\mathcal{M}$  provam  $\Leftarrow$ )  $\square$



Para passar da noção de espaço conexo para subconjunto conexo, precisamos introduzir a noção de subcoleção induzida.

Sejam  $E$  um conjunto e  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$ . Seja  $X$  um subconjunto de  $E$ , a subcoleção de  $\mathcal{P}(X)$ , denotada  $X \cap \mathfrak{B}$  e dada por

$$X \cap \mathfrak{B} = \{B' \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathfrak{B}, B' = X \cap B\},$$

chama-se de *subcoleção induzida em  $X$  por  $\mathfrak{B}$* .

**Exercício 7.2** (propriedade de subcoleções induzidas) – Sejam  $X_1$  e  $X_2$  dois subconjuntos de um conjunto  $E$  e  $\mathfrak{B}$  uma subcoleção de  $\mathcal{P}(E)$ . Sejam  $\mathfrak{B}_1 = X_1 \cap \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B}_2 = X_2 \cap \mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_{21} = X_2 \cap \mathfrak{B}_1$ . Mostre que se  $X_2 \subset X_1$  então  $\mathfrak{B}_{21} = \mathfrak{B}_2$ . Este resultado é uma consequência da seguinte observação. Se  $X_1$  e  $X_2$  tocam  $B$ , se  $B_1$  é a interseção de  $X_1$  com  $B$ , se  $B_2$  é a interseção de  $X_2$  com  $B$ , e se  $X_2$  está contido em  $X_1$ , como mostra a Figura 7.1, então  $B_2$  é a interseção de  $X_2$  com  $B_1$ .  $\square$

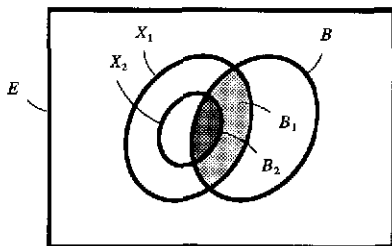


Fig. 7.1 – Propriedade dos elementos de subcoleções induzidas.

**Exercício 7.3** (propriedade de uma subcoleção induzida por uma morfologia) – Seja  $(E, \mathcal{M})$  um espaço morfológico. Usando a distributividade generalizada da união e da interseção, prove que se  $X$  é um subconjunto de  $E$  então a subcoleção  $X \cap \mathcal{M}$ , induzida em  $X$  por  $\mathcal{M}$ , é uma morfologia. Em outros termos, se  $A$  é um aberto em  $E$  então  $X \cap A$  é um aberto em  $X$ .  $\square$

Observamos o seguinte. Sejam  $X_1$  e  $X_2$  dois subconjuntos de um espaço morfológico  $(E, \mathcal{M})$  tais que  $X_2 \subset X_1$ . Pela propriedade enunciada no Exercício 7.3, se  $A$  é um aberto em  $X_1$ , isto é, se  $A$  é um aberto segundo  $\mathcal{M}_1 = X_1 \cap \mathcal{M}$ , então  $X_2 \cap A$  é um aberto segundo  $X_2 \cap \mathcal{M}_1$ . Mas, pela propriedade enunciada no Exercício 7.2, isto significa que  $X_2 \cap A$  é um aberto segundo  $X_2 \cap \mathcal{M}$ . Em outros termos, se  $A$  é um aberto em  $X_1$  então  $X_2 \cap A$  é um aberto em  $X_2$ .

**Definição 7.4** (subconjunto conexo de um espaço morfológico) – Um subconjunto  $X$  de um espaço morfológico  $(E, \mathcal{M})$  é um *subconjunto conexo*, quando  $X$  é um espaço morfológico conexo segundo a morfologia induzida em  $X$  por  $\mathcal{M}$ .  $\square$

**Exercício 7.4** (conexidade e indução) – Sejam  $(E_1, \mathcal{M}_1)$  e  $(E_2, \mathcal{M}_2)$  dois espaços morfológicos tais que  $E_2 \subset E_1$  e  $\mathcal{M}_2$  é induzida em  $E_2$  por  $\mathcal{M}_1$ . Mostre que se  $X \subset E_2$  então  $X$  é um subconjunto conexo de  $(E_1, \mathcal{M}_1)$  se e somente se  $X$  é um subconjunto conexo de  $(E_2, \mathcal{M}_2)$ .  $\square$

Daqui para frente,  $E$  será  $Z^2$  ou o retângulo  $\text{Ret}(n_1, n_2)$  de  $Z^2$  (ver Capítulo 4). Para definir a noção de conexidade digital de um subconjunto  $Y$  de  $E$  a partir da noção de conexidade (morfológica), vamos introduzir um segundo conjunto denotado  $2E$  e dado por

$$2E = \{x \in Z^2 : \exists y \in E, x = 2y\},$$

e equipa-lo de uma morfologia por meio de uma dilatação conveniente.

Denotaremos por  $\delta_{\square}$  a dilatação (i.t. ou p.i.t) sobre  $\mathcal{P}(2E)$ , pelo quadrado  $3 \times 3$  de  $2E$  centralizado na origem. Denotaremos por  $a$  e  $b$  as funções de  $E$  em  $\mathcal{P}(2E)$  definidas por

$$a(y) = \delta_{\square}(\{2y\}) \text{ e } b(y) = \delta_{\square}(\{2y\})^c \quad (y \in E).$$

Denotaremos por  $\delta_a$  e  ${}_b\varepsilon$ , a dilatação e a erosão de  $\mathcal{P}(E)$  em  $\mathcal{P}(2E)$  definidas por

$$\delta_a(Y) = \bigcup_{y \in Y} a(y) \text{ e } {}_b\varepsilon(Y) = \bigcap_{y \in Y} b(y) \quad (Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Observamos que  $\delta_a$  e  ${}_b\varepsilon$  são dois operadores de ampliação mutuamente duais por complementação e que  ${}_b\varepsilon = \varepsilon_{\delta_a}$ .

Com estes ingredientes podemos agora definir a noção de conexidade digital.

**Definição 7.5** (conexidade digital de um subconjunto) – Um subconjunto  $Y$  de  $E$  é dito *4-conexo* (resp. *8-conexo*) se e somente se  ${}_b\varepsilon(Y)$  (resp.  $\delta_a(Y)$ ) é um subconjunto conexo do espaço morfológico  $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$ . Um subconjunto que não é 4-conexo (resp. 8-conexo) é dito *4-desconexo* (resp. *8-desconexo*).  $\square$

Chamaremos o espaço morfológico  $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$ , de *espaço de vizinhança 8*.

Sejam  $\varepsilon_a$  e  ${}_b\delta$  a erosão e a dilatação formando, respectivamente, com  $\delta_a$  e  ${}_b\varepsilon$  duas conexões de Galois  $(\varepsilon_a, \delta_a)$  e  $({}_b\delta, {}_b\varepsilon)$ . A primeira é uma conexão de Galois entre  $(\mathcal{P}(2E), \supseteq)$  e  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ , a segunda entre  $(\mathcal{P}(2E), \subset)$  e  $(\mathcal{P}(E), \supseteq)$ . Neste caso,  $\varepsilon_a$  e  ${}_b\delta$  são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(X) &= \{y \in E : a(y) \subset X\} \quad (X \in \mathcal{P}(2E)) \\ {}_b\delta(X) &= \{y \in E : X \subset b(y)\}^c \quad (X \in \mathcal{P}(2E)). \end{aligned}$$

Observamos que  ${}_b\delta = \delta_{\varepsilon_a}$ .

Observamos também que  $(\varepsilon_a)(\delta_a) = \iota$  e  $({}_b\delta)({}_b\varepsilon) = \iota$ , e que as restrições de  $\varepsilon_a$  a  $\delta_a(\mathcal{P}(E))$  e de  ${}_b\delta$  a  ${}_b\varepsilon(\mathcal{P}(E))$  são dois isomorfismos de reticulados.

**Exercício 7.5** (propriedade dos abertos no espaço de vizinhança 8) – Mostre que para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$  e todo aberto  $A$  em  $\delta_a(Y)$ ,

$${}_b\varepsilon(Y) \subset A \Rightarrow \delta_a(Y) \subset A. \quad \square$$

**Prova** – Para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\begin{aligned} {}_b\varepsilon(Y) = \emptyset &\Rightarrow {}_b\delta({}_b\varepsilon(Y)) = \emptyset && \text{(propriedade da dilatação)} \\ &\Leftrightarrow Y = \emptyset, && (({}_b\delta)({}_b\varepsilon) = \iota) \end{aligned}$$

isto é,  $Y \neq \emptyset \Rightarrow {}_b\varepsilon(Y) \neq \emptyset$ .

Para todo  $Y$  e  $Y'$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$Y \cap Y'^c \neq \emptyset \Rightarrow {}_b\varepsilon(Y \cap Y'^c) \neq \emptyset \quad (\text{resultado anterior})$$

$$\Leftrightarrow {}_b\varepsilon(Y) \cap {}_b\varepsilon(Y'^c) \neq \emptyset \quad ({}_b\varepsilon \text{ é uma erosão})$$

$$\Leftrightarrow {}_b\varepsilon(Y) \cap \delta_a(Y')^c \neq \emptyset, \quad (\delta_a \text{ e } {}_b\varepsilon \text{ são mutuamente duais por complementação})$$

isto é, pela consistência entre a interseção e a inclusão,  ${}_b\varepsilon(Y) \subset \delta_a(Y') \Rightarrow Y \subset Y'$ .

Para todo aberto  $A'$  segundo a morfologia  $\delta_a(\mathcal{P}(E))$  e todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$${}_b\varepsilon(Y) \subset A' \Leftrightarrow {}_b\varepsilon(Y) \subset \delta_a(\varepsilon_a(A')) \quad (A' \in \delta_a(\mathcal{P}(E)) \text{ e } (\varepsilon_a)(\delta_a) = \iota)$$

$$\Rightarrow Y \subset \varepsilon_a(A') \quad (\text{resultado anterior com } Y' = \varepsilon_a(A'))$$

$$\Rightarrow \delta_a(Y) \subset \delta_a(\varepsilon_a(A')) \quad (\delta_a \text{ é isotônico})$$

$$\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A', \quad (A' \in \delta_a(\mathcal{P}(E)) \text{ e } (\varepsilon_a)(\delta_a) = \iota)$$

isto é,  ${}_b\varepsilon(Y) \subset A' \Rightarrow \delta_a(Y) \subset A'$ .

Para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$  e para todo aberto  $A$  em  $\delta_a(Y)$ , por definição de aberto, existe  $A'$  em  $A' \in \delta_a(\mathcal{P}(E))$  tal que  $A = A' \cap \delta_a(Y)$ . Para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$  e para todo aberto  $A$  em  $\delta_a(Y)$ ,

$${}_b\varepsilon(Y) \subset A \Leftrightarrow {}_b\varepsilon(Y) \subset A' \cap \delta_a(Y) \quad (A = A' \cap \delta_a(Y))$$

$$\Rightarrow {}_b\varepsilon(Y) \subset A' \quad (\text{propriedade da interseção})$$

$$\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A' \quad (\text{resultado anterior})$$

$$\Rightarrow \delta_a(Y) \cap \delta_a(Y) \subset A' \cap \delta_a(Y) \quad (\text{propriedade conjunta da interseção e da inclusão})$$

$$\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A' \cap \delta_a(Y) \quad (\text{idempotência})$$

$$\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A, \quad (A = A' \cap \delta_a(Y))$$

isto é,  ${}_b\varepsilon(Y) \subset A \Rightarrow \delta_a(Y) \subset A$ .  $\square$

**Exercício 7.6** (relação entre os dois tipos de conexidade digital) – Usando o resultado do Exercício 7.5, mostre que se  $Y$  for 4-conexo então ele será 8-conexo.  $\square$

**Prova** – Basta mostrar que se  ${}_b\varepsilon(Y)$  for um subconjunto conexo do espaço morfológico  $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$ , então o subconjunto  $\delta_a(Y)$  também o será.

Seja  $A \subset \delta_a(Y)$  um aberto e fechado em  $\delta_a(Y)$ . O subconjunto  $A \cap {}_b\varepsilon(Y)$  será aberto e fechado em  ${}_b\varepsilon(Y)$ , pois  ${}_b\varepsilon(Y)$  é contido em  $\delta_a(Y)$  (vera observação segundo o Exercício 7.3). Como  ${}_b\varepsilon(Y)$  é conexo, teremos  $A \cap {}_b\varepsilon(Y) = {}_b\varepsilon(Y)$  (pela definição de subconjunto conexo, não pode existir outro aberto e fechado não vazio, a não ser  ${}_b\varepsilon(Y)$ ). Portanto  ${}_b\varepsilon(Y) \subset A$ . Então, pelo resultado do Exercício 7.5,  $\delta_a(Y) \subset A$ , isto é,  $A = \delta_a(Y)$  e  $\delta_a(Y)$  é conexo.  $\square$

A Figura 7.2 mostra um conjunto 4-desconexo e a Figura 7.3 mostra o mesmo conjunto 8-conexo. Na Figura 7.2, os quatro quadradinhos  $3 \times 3$  são abertos segundo  $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$ , suas interseções com  $\delta_a(Y)^c$  formam quatro quadrados  $1 \times 1$  que são abertos segundo a subcoleção induzida em  ${}_b\varepsilon(Y)$  por  $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$ , como é possível formar com eles dois subconjuntos disjuntos, então  $Y$  não é 4-conexo. No entanto, na Figura 7.3, os quatro quadradinhos  $3 \times 3$  são abertos segundo  $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$ , suas interseções com  $\delta_a(Y)$  formam os mesmos quatro quadradinhos  $3 \times 3$  que são abertos segundo a subcoleção induzida em  $\delta_a(Y)$  por  $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$ , como é possível formar com eles dois subconjuntos disjuntos, então  $Y$  é 8-conexo.

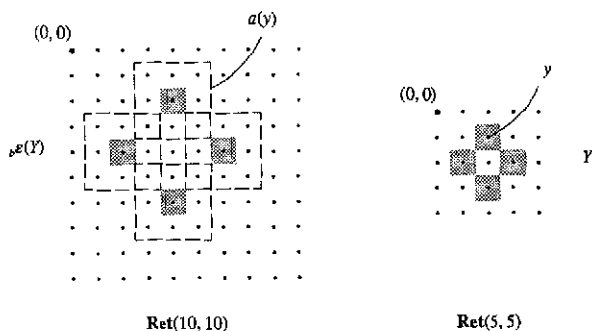


Fig. 7.2 – Um subconjunto 4–desconexo.

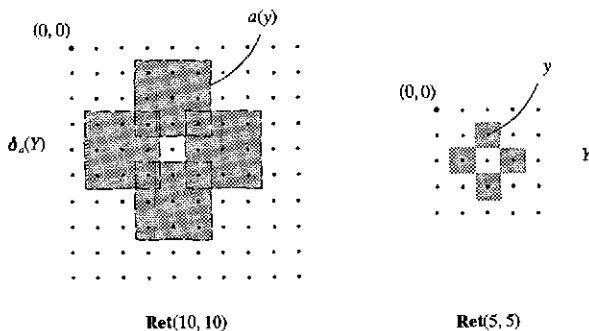


Fig. 7.3 – Um subconjunto 8–conexo.

A Figura 7.4 mostra um conjunto 4-conexo. Nesta figura, os dois quadrados  $3 \times 3$  são abertos segundo  $\delta_a(\mathcal{P}(\text{Ret}(3, 4)))$ , suas interseções com  $\delta_a(Y)^c$  formam dois retângulos  $1 \times 2$  que são abertos segundo a subcoleção induzida em  $\delta_a(Y)^c$  por  $\delta_a(\mathcal{P}(\text{Ret}(3, 4)))$ , como não é possível formar com eles dois subconjuntos disjuntos, então  $Y$  é 4-conexo.

A necessidade de se usar dois tipos de conexidade vai ser esclarecida após termos introduzido a noção de componente conexa. Esta noção decorre da definição de conexidade. Um dado subconjunto pode não ser conexo mas nele podemos distinguir partes conexas que chamaremos de componentes conexas.

**Proposição 7.2** (união de uma família de subconjuntos conexos de um espaço morfológico) – Seja  $(X_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos conexos de um espaço morfológico. Se existir um ponto  $x_0$  comum a todos os  $X_i$ , então a união  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$  será conexo.  $\square$

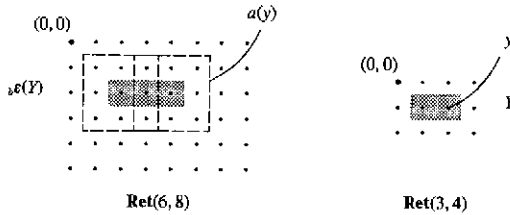


Fig. 7.4 – Um subconjunto 4-conexo.

**Prova** ([Lima76, p 92]) – Seja  $A \subset X$  um aberto e fechado em  $X$ . Substituindo, se necessário,  $A$  por  $S - A$  (que ainda será aberto e fechado), podemos supor que  $x_0 \in A$ . Para cada  $i \in I$ ,  $A \cap X_i$  será aberto e fechado em  $X_i$ , pois  $X_i$  é contido em  $X$  (ver a observação seguindo o Exercício 7.3). Pela escolha de  $A$  e a hipótese sobre  $X_i$ ,  $A \cap X_i$  é também não vazio. Como  $X_i$  é conexo, para todo  $i \in I$ , teremos  $A \cap X_i = X_i$  (pela definição de subconjunto conexo, não pode ter outro aberto e fechado não vazio a não ser  $X_i$ ). Portanto  $X_i \subset A$ , para todo  $i$  em  $I$ . Então, pela propriedade de união,  $X = \bigcup_{i \in I} X_i \subset A$ , isto é,  $X = A$  e  $X$  é conexa. □

A Proposição 7.2 dá um sentido à noção de componente conexa dado um ponto num espaço morfológico.

**Definição 7.6** (componente conexa dado um ponto num espaço morfológico) – Seja  $x$  um ponto de um espaço morfológico  $X$ . A *componente conexa*  $C_x$  dado  $x$  no espaço  $X$  é a união de todos os subconjuntos conexos do espaço  $X$  que contêm  $x$ . □

Pela definição de componente conexa dado um ponto, observamos que, para todo  $x$  em  $X$ ,  $x \in C_x$  e  $C_x$  é um subconjunto conexo de  $X$  (pela Proposição 7.2), e que  $X$  é um espaço conexo se e somente se ele é a componente conexa relativa a cada um de seus pontos.

**Proposição 7.3** (princípio de maximalidade das componentes conexas) – A componente conexa  $C_x$  dado  $x$  num espaço morfológico  $X$  é o *maior* subconjunto conexo de  $X$  que contém  $x$ . Em outros termos, se  $C_x \subset S \subset X$  e  $S$  é conexo então  $C_x = S$ . □

**Prova** – Sejam  $x \in X$  e  $\mathcal{C}_x = \{S \in \mathcal{P}(X); S \text{ é conexo e } x \in S\}$ , então pela definição de  $C_x$  e a propriedade de união,  $C_x = \sup \mathcal{C}_x$  e  $C_x \in \mathcal{C}_x$ . Isto é, pelo resultado enunciado no Exercício 2.7,  $C_x$  é o maior elemento de  $\mathcal{C}_x$ . □

**Definição 7.7** (componente conexa de um espaço morfológico) – Um subconjunto  $C$  de um espaço morfológico  $X$  é uma *componente conexa*  $C$  de  $X$  se e somente se por algum  $x$  em  $X$ ,  $C = C_x$ , onde  $C_x$  é a componente conexa relativa ao ponto  $x$ . □

Em seguida, vamos verificar que as componentes conexas de um conjunto formam uma partição, isto é, elas recobrem o conjunto e são duas a duas disjuntas.

**Proposição 7.4** (partição das componentes conexas) – As componentes conexas de um espaço morfológico  $X$  formam uma partição de  $X$ . □

**Prova** – Sejam  $C_i$  e  $C_j$  duas componentes conexas de um espaço morfológico  $X$ . Pela definição de componente conexa, existem  $x_i$  e  $x_j$  em  $X$  tais que  $C_i = C_{x_i}$  e  $C_j = C_{x_j}$  e

$$\begin{aligned} C_{x_i} \cap C_{x_j} \neq \emptyset &\Rightarrow \exists x \in X, x \in C_{x_i} \text{ e } C_{x_j} && \text{(definições de interseção e de vazio)} \\ &\Rightarrow C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ é conexa} && \text{(Proposição 7.2)} \\ &\Rightarrow C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ é conexa e contém } x_i \text{ e } x_j && (x \in C_x \text{ e propriedades da união)} \\ &\Rightarrow C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ é conexa e contém } x_i \text{ e } x_j, \text{ e } C_{x_i} \text{ e } C_{x_j} \subset C_{x_i} \cup C_{x_j} && \text{(propriedade da união)} \\ &\Rightarrow C_{x_i} = C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ e } C_{x_j} = C_{x_i} \cup C_{x_j} && \text{(Proposição 7.3)} \\ &\Rightarrow C_{x_i} = C_{x_j}. && \text{(transitividade da igualdade)} \end{aligned}$$

Em outros termos,  $C_i \neq C_j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$ .

Seja  $(C_i)_{i \in I}$  a família de todas as componentes conexas do espaço  $X$ , temos

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{x \in X} \{x\} && \text{(decomposição de um conjunto como união de singletons)} \\ &\subset \bigcup_{x \in X} C_x && (x \in C_x \text{ e propriedades da união)} \\ &= \bigcup_{i \in I} C_i && \text{(definição de componente conexa)} \\ &\subset X. && (C_i \subset X \text{ e propriedade da união)} \end{aligned}$$

Em outros termos, pela anti-simetria da inclusão,  $X = \bigcup_{i \in I} C_i$  e a família  $(C_i)_{i \in I}$  forma uma partição de  $X$ . □

A partir das propriedades dos espaços morfológicos podemos deduzir propriedades de topologia digital.

**Proposição 7.5** (união de uma família de subconjuntos 4-conexos e 8-conexos) – Seja  $(Y_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos 4-conexos (resp. 8-conexos) de  $E$ . Se existir um ponto  $y_0$  comum a todos os  $Y_i$ ,

então a união  $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$  será 4-conexa (resp. 8-conexa). □

**Prova** – Vamos fazer a prova no caso da conexidade 4. Seja  $X = {}_b\epsilon(Y)$  e seja  $X_i = {}_b\epsilon(Y_i)$  para todo  $i$  em  $I$ . Os conjuntos  $\mathcal{P}(E)$  e  ${}_b\epsilon(\mathcal{P}(E))$  sendo isomorfos, o subconjunto não vazio  ${}_b\epsilon(\{y_0\})$  é incluído em todos os  $X_i$  que por isto têm um ponto em comum. Como os  $X_i$  são subconjuntos conexas do espaço morfológico  $(2E, \delta_\alpha(\mathcal{P}(E)))$ , pela Proposição 7.2, a união dos  $X_i$  é também um subconjunto conexo neste espaço. Mas, pelo isomorfismo esta união é o próprio  $X$ , o que prova que  $Y$  é um subconjunto 4-conexo de  $E$ .

A prova da conexidade 8 é similar a da conexidade 4. □

A Proposição 7.5 dá um sentido à noção de componente 4-conexa e 8-conexa dado um ponto de  $E$ .

**Definição 7.8** (componente 4-conexa e 8-conexa de um subconjunto dado um ponto) – Seja  $y$  um ponto de um subconjunto  $Y$  de  $E$ . A *componente 4-conexa* (resp. *8-conexa*)  $C_y$  de  $Y$  dado  $y$  é a união de todos os subconjuntos 4-conexos (resp. 8-conexos) de  $Y$  que contêm  $y$ . □

Pelos mesmos argumentos usados no caso dos espaços morfológicos, a componente 4-conexa (resp. 8-conexa)  $C_y$  de um subconjunto  $Y$  de  $E$  dado um ponto  $y$  em  $Y$ , é o maior subconjunto 4-conexo (resp. 8-conexo) de  $Y$  que contém  $y$ .

Chamaremos de *componente 4-conexa* (resp. *8-conexa*) de um subconjunto  $Y$  um subconjunto que se identifica a uma componente 4-conexa (resp. 8-conexa) de  $Y$  dado algum ponto de  $Y$ .

Pelos mesmos argumentos usados no caso dos espaços morfológicos, as componentes 4-conexas (ou 8-conexas) de um subconjunto  $Y$  de  $E$  formam uma partição de  $Y$ .

A componente conexa de um subconjunto pode ser obtida através do uso repetido da dilatação condicional (ou geodésica) como vamos ilustrar em seguida.

Ao longo deste capítulo, quando fizermos referência à coleção  $\mathfrak{B}_E$ , entendemos que  $\mathfrak{B}_E$  é a coleção  $\mathcal{P}(E)$  no caso invariante por translação, e  $\mathfrak{B}_E$  é a coleção  $\mathcal{P}(E \oplus E)$  no caso condicionalmente invariante em translação (ver Capítulo 4).

**Definição 7.9** (dilatação e erosão condicional) – Seja  $B$  um elemento de  $\mathfrak{B}_E$  e seja  $X$  um subconjunto de  $E$ . Os operadores  $\delta_{B,X}$  e  $\varepsilon_{B,X}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados por, para todo  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\delta_{B,X}(Y) = \delta_B(Y) \cap X \quad \text{e} \quad \varepsilon_{B,X}(Y) = \varepsilon_B(Y) \cup X$$

são chamados, respectivamente, de *dilatação* e *erosão condicional* (ou *geodésica*) por  $B$  dado  $X$ .  $\square$

A Figura 7.5 mostra uma dilatação condicional pelo losângulo  $3 \times 3$  (a cruz) e seu efeito sobre um subconjunto  $Y$  reduzido a um único ponto.

**Definição 7.10** ( $n$ -dilatação condicional e  $n$ -erosão condicional) – Seja  $n > 0$ , seja  $B$  um elemento de  $\mathfrak{B}_E$  e seja  $X$  um subconjunto de  $E$ . Os operadores  $\delta_{B,X}^n$  e  $\varepsilon_{B,X}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados por  $n - 1$  composições sucessivas

$$\delta_{B,X}^n = (\delta_{B,X})^n \quad \text{e} \quad \varepsilon_{B,X}^n = (\varepsilon_{B,X})^n$$

são chamados, respectivamente, de  $n$ -*dilatação condicional* (ou *geodésica*) e  $n$ -*erosão condicional* (ou *geodésica*) por  $B$  dado  $X$ .  $\square$

A Figura 7.6 mostra uma 3-dilatação condicional pelo losângulo  $3 \times 3$  (a cruz) e seu efeito sobre um subconjunto  $Y$ , reduzido a um único ponto. A figura mostra um efeito de preenchimento controlado pelo subconjunto  $X$ .

**Definição 7.11** (abertura e fechamento por reconstrução a partir de um marcador) – Seja  $B$  um elemento de  $\mathfrak{B}_E$  e seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . Os operadores  $\gamma_{B,Y}$  e  $\phi_{B,Y}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados por, para todo  $X$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\gamma_{B,Y}(X) = \bigcup_{n=1, \dots} \delta_{B,X}^n(Y) \quad \text{e} \quad \phi_{B,Y}(X) = \bigcap_{n=1, \dots} \varepsilon_{B,X}^n(Y)$$

são chamados, respectivamente, de *abertura* e *fechamento por reconstrução* dado o marcador  $Y$ .  $\square$

A Figura 7.7 mostra, em (a), uma abertura por reconstrução pelo losângulo (a cruz)  $3 \times 3$  dado um marcador  $Y$  reduzido a um único ponto. Observamos o efeito desta abertura sobre um subconjunto  $X$ , 4-desconexo. O resultado desta abertura sobre um subconjunto 4-desconexo  $X$  é a componente 4-conexa de  $X$  que contém o marcador  $Y$ . A Figura 7.7 mostra, em (b), uma abertura por reconstrução pelo quadrado  $3 \times 3$  dado o mesmo marcador  $Y$ . O resultado desta abertura sobre o subconjunto 8-conexo  $X$  é a componente 8-conexa de  $X$  que contém o marcador  $Y$ , isto é, aqui o próprio subconjunto  $X$ .

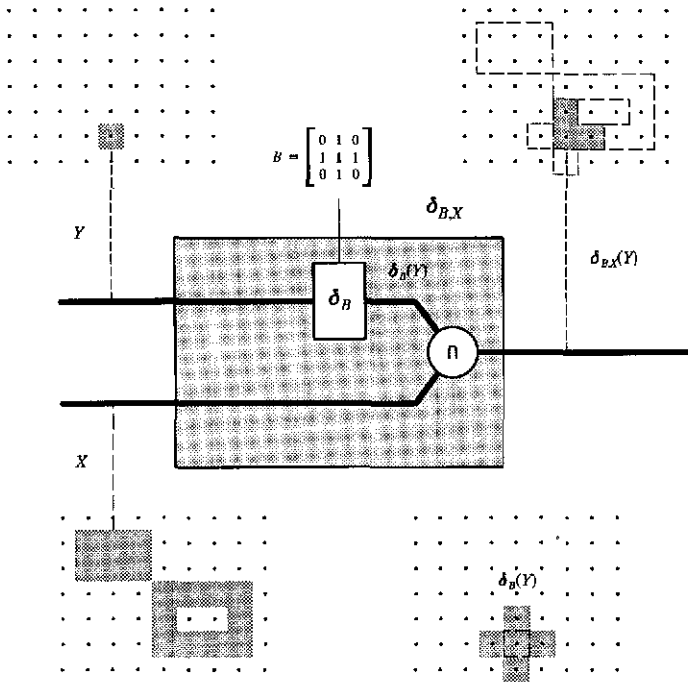


Fig. 7.5 – Dilatação condicional.

De um modo geral, a abertura por reconstrução e o fechamento por reconstrução permitem extrair, respectivamente, os objetos das imagens e os objetos do fundo das imagens que tem interseção não vazia, respectivamente, com o marcador e com o complemento do marcador. A conectividade considerada é definida pelo elemento estruturante  $B$ . Quando  $B$  é o losângulo  $3 \times 3$  (a cruz) os objetos extraídos pela abertura e pelo fechamento por reconstrução são 4-conexos. Quando  $B$  é o quadrado  $3 \times 3$  os objetos extraídos pela abertura e pelo fechamento por reconstrução são 8-conexos.

Um ponto importante a ser discutido em topologia digital sobre o retângulo  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ , é a necessidade de se ter dois tipos de conectividade: a conectividade 4 e a 8. Uma análise dos subconjuntos  $Y$  e  $Y^c$  da Figura 7.8 ilustra esta necessidade. Se usamos o mesmo tipo de conectividade para a análise dos subconjuntos  $Y$  e  $Y^c$  encontramos uma anomalia.



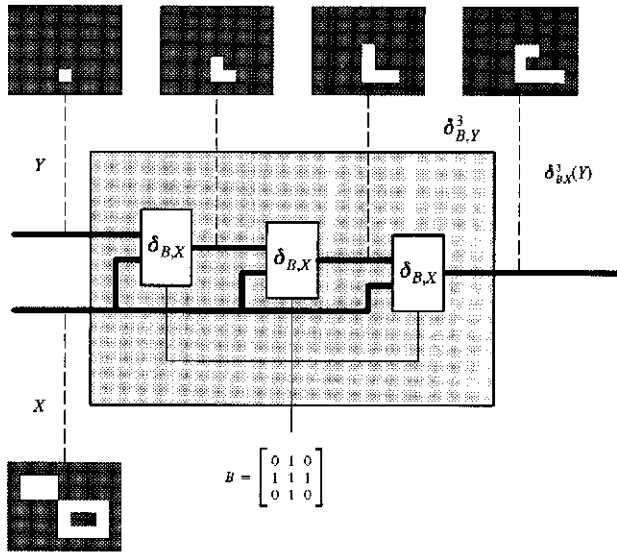


Fig. 7.6 – 3-dilatação condicional.

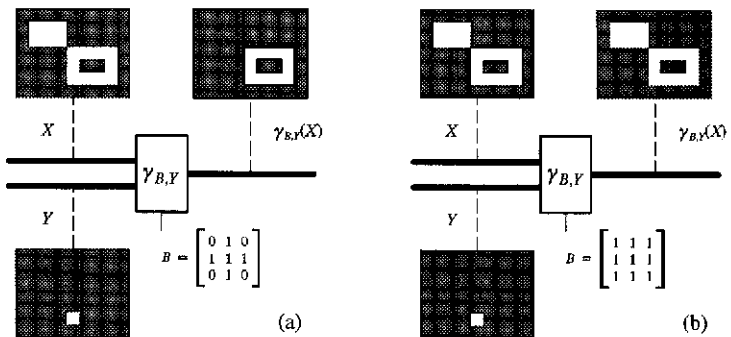


Fig. 7.7 – Aberturas por reconstrução.

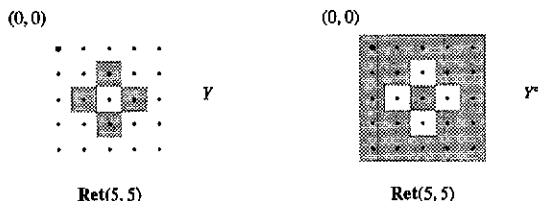


Fig. 7.8 – Um subconjunto e seu complemento.

Se usarmos a conexidade 4,  $Y$  e  $Y^c$  são dois subconjuntos desconexos ( $Y$  tem quatro componentes 4-conexas e  $Y^c$  tem duas) o que é anormal, pois, um dos dois deveria ser considerado conexo para justificar a separação do outro em várias componentes conexas. Por exemplo, o subconjunto  $Y$  deveria ser considerado conexo para separar  $Y^c$  em duas componentes conexas, ou então, deveria ser considerado  $Y^c$  conexo para separar  $Y$  em quatro componentes conexas.

Se usamos a conexidade 8,  $Y$  e  $Y^c$  são dois subconjuntos conexos o que é anormal também, pois, no caso da figura, um dos dois deveria ser desconexo para justificar a presença de partes totalmente rodeiadas pelo outro subconjunto.

Este problema tem uma solução se analisamos as imagens binárias usando as duas conexidades: uma para o subconjunto considerado e a outra para seu complemento. Isto é, temos duas maneira de analisar topologicamente uma imagem binária sem encontrar anomalias.

Por exemplo, na Figura 7.8 as quatro componentes 4-conexas de  $Y$  são totalmente rodeiadas pelo subconjunto 8-conexo  $Y^c$ . Ou ainda, o subconjunto 8-conexo  $Y$  separa as duas componentes 4-conexas de  $Y^c$ .

No último capítulo, apresentaremos as *aberturas por reconstrução* que permitem extrair de um subconjunto suas componentes conexas. Estas aberturas dependem de um elemento estruturante. Para extrair as componentes 4-conexas usa-se o losângulo  $3 \times 3$  (a cruz) centralizado na origem e para extrair as 8-conexas usa-se o quadrado  $3 \times 3$  centralizado na origem.

## 7.2 Buraco, borda, árvore de adjacência e homotopia

A partir da definição de subconjunto 4-conexo e 8-conexo, podemos definir as noções de adjacência entre dois pontos e entre dois subconjuntos. Estas definições são equivalentes as dadas em [KonRos89].

**Definição 7.12** (adjacência entre dois pontos) – Dois pontos  $y_1$  e  $y_2$  de  $E$  são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) se e somente se o subconjunto  $\{y_1, y_2\}$  é 4-conexo (resp. 8-conexo).  $\square$

**Definição 7.13** (adjacência entre dois subconjuntos) – Dois subconjuntos  $Y_1$  e  $Y_2$  de  $E$  são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) se e somente se existem dois pontos, um ponto  $y_1$  em  $Y_1$  e um ponto  $y_2$  em  $Y_2$ , 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes).  $\square$

Para definirmos a noção de buraco precisamos introduzir primeiro uma relação de ordem parcial entre subconjuntos conexos. Se  $A$  e  $B$  são dois subconjuntos de  $E$  e  $A$  é 4-conexo (resp. 8-conexo), então dizemos que  $A$  envolve  $B$  se cada ponto de  $B$  está contido em uma componente 8-conexo (resp. 4-conexo) finita de  $\mathbf{Z}^2 - A$ .

A Figura 7.9 mostra uma componente 4-conexa  $Y$  que envolve  $B$ . Neste exemplo, todos os pontos de  $B$  estão contidos numa componente 8-conexa finita de  $Z^2 - Y$ , o próprio  $B$ .

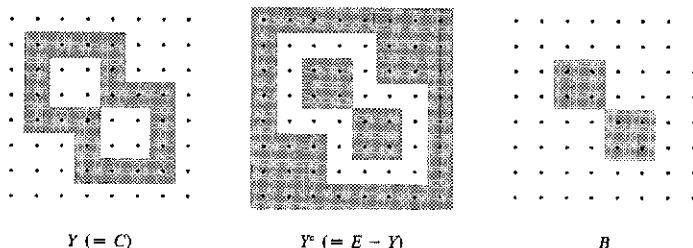


Fig. 7.9 – Um buraco num subconjunto.

**Definição 7.14** (buraco) – Seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . Uma componente 8-conexa (resp. 4-conexa) de  $Y^c$ , 8-adjacente (resp. 4-adjacente) à uma componente 4-conexa (resp. 8-conexa)  $C$  de  $Y$  e envolvida por  $C$ , chama-se *buraco 8-conexo* (resp. *4-conexo*) em  $C$ . Um *buraco 8-conexo* (resp. *4-conexo*) em  $Y$  é um buraco 8-conexo (resp. 4-conexo) numa componente 4-conexa (resp. 8-conexa) de  $Y$ .  $\square$

A Figura 7.9 mostra um buraco 8-conexo  $B$  num subconjunto  $Y$ . Neste exemplo,  $B$  é um buraco 8-conexo na componente 4-conexa  $C$  de  $Y$  (aqui  $C$  é o próprio  $Y$ ). O subconjunto  $B$  é uma componente 8-conexa de  $Y^c (= E - Y)$ , 8-adjacente à  $C$  e envolvida por  $C$ . Verificamos assim que o subconjunto  $Y$  tem *um só* buraco 8-conexo: o subconjunto  $B$ . Da mesma maneira, podemos verificar que  $Y$  tem *dois* buracos 4-conexos: os dois quadrados  $2 \times 2$  formando  $B$ .

**Definição 7.15** (ponto isolado) – Um *ponto* de um subconjunto  $Y$  de  $E$  é *4-isolado* (resp. *8-isolado*) se e somente se ele não é 4-adjacente (resp. 8-adjacente) a nenhum outro ponto de  $Y$ .  $\square$

Os pontos isolados de um subconjunto podem ser obtidos através do uso do chamado operador sup-gerador como vamos ilustrar em seguida.

A partir das quatro classes de operadores elementares da Morfologia Matemática podemos construir mais duas outras classes de grande importância teórica e prática. A primeira é a classe dos operadores sup-geradores e a segunda a dos operadores inf-geradores. Aqui, nós vamos nos restringir aos operadores construídos a partir de operadores elementares invariantes por translação ou condicionalmente invariantes em translação.

**Definição 7.16** (anti-dilatação e anti-erosão) – Seja  $B$  um elemento de  $\mathfrak{B}_E$ . Os operadores  $\delta_B^a$  e  $\varepsilon_B^a$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados pelas composições

$$\delta_B^a = \sim \delta_B, \quad \varepsilon_B^a = \sim \varepsilon_B$$

são chamados, respectivamente, de *anti-dilatação* e *anti-erosão* pelo elemento estruturante  $B$ .  $\square$

**Definição 7.17** (operadores sup-geradores e inf-geradores parametrizados por dois subconjuntos) – Sejam  $A$  e  $B$  dois elementos de  $\mathfrak{B}_E$  tais que  $A \subset B$ . Os operadores  $\lambda_{A,B}$  e  $\mu_{A,B}$  sobre  $\mathfrak{P}(E)$  dados por, para todo  $X$  em  $\mathfrak{P}(E)$ ,

$$\lambda_{A,B} = \varepsilon_A \wedge \delta^a_{B^c} \text{ e } \mu_{A,B} = \delta_A \vee \varepsilon^a_{B^c}$$

são chamados, respectivamente, de *operador sup-gerador* e *operador inf-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$* .  $\square$

O operador sup-gerador de parâmetros  $A$  e  $B^c$  é equivalente ao chamado *operador "Hit-Miss"* de parâmetros  $A$  e  $B$ , em outros termos,

$$\text{Hit-Miss}_{A,B} = \lambda_{A,B^c}.$$

**Exercício 7.7** (definição equivalente dos operadores sup-geradores e inf-geradores parametrizados por dois subconjuntos) – Mostre que, no caso invariante em translação, o transformado de um subconjunto  $X$  de  $\text{Ret}(n_1, n_2)$  pelo operador sup-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  é o subconjunto

$$\lambda_{A,B}(X) = \{x \in E : (A + x) \subset X \subset (B + x)\}$$

e o transformado pelo operador inf-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  é o subconjunto

$$\mu_{A,B}(X) = \{x \in E : (A^t + x) \cap X \neq \emptyset \text{ ou } (B^t + x) \cup X \neq E\}. \quad \square$$

Dados dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $E$ , tais que  $A \subset B$ , chamaremos de *padrão* ou, matematicamente, de *intervalo fechado* a coleção de todos os subconjuntos de  $E$  que contêm  $A$  e são contidos em  $B$ , denotaremos esta coleção  $[A, B]$ ,

$$[A, B] = \{X \in \mathfrak{P}(E) : A \subset X \subset B\}.$$

Observando a expressão de  $\lambda_{A,B}(X)$  no enunciado do Exercício 7.7, verificamos que o operador sup-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  "procura" em  $X$  o padrão  $[A, B]$ . Um ponto  $x$  é um ponto de  $\lambda_{A,B}(X)$ , se e somente se o padrão posicionado em  $x$  casa com  $X$  (no sentido de contém  $X$ ). Em outros termos, o operador sup-gerador realiza o casamento ("*template matching*") entre o padrão e as estruturas geométricas que aparecem na imagem.

Por exemplo, sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\text{Ret}(5, 5)$  dados por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (B^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

Como  $A$  e  $B^c$  são subconjuntos com poucos pontos e que estes estão agrupados, para simplificar a notação, representamos  $A$  e  $B^c$  na forma de submatrizes que contêm todos os 1s e o elemento posicionado na origem, e  $B$  na forma de submatriz que contém todos os 0s e o elemento posicionado na origem. Desta forma temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}).$$

Nesta representação é entendido que os elementos não representados valem 0 para  $A$  e  $B^c$ , e 1 para  $B$ . Finalmente, representaremos o padrão  $[A, B]$  pela matriz

$$[A, B] = \begin{bmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Nesta representação, os elementos representados pelo símbolo  $\cdot$  valem indiferentemente 0 ou 1. É entendido também que os elementos não representados valem indiferentemente 0 ou 1. Este padrão contém, em particular os seguintes subconjuntos,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.10 mostra o operador sup-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  como escolhidos acima e seu efeito sobre um subconjunto com duas estruturas em forma de  $\times$  e de  $+$ . O resultado é a eliminação da estrutura em forma de  $+$ .

A Figura 7.11 mostra a extração de pontos isolados por meio de operadores sup-geradores. Em (a) temos os pontos 4-isolados e (b) os 8-isolados.

**Definição 7.18** (borda-4 e borda-8 de um subconjunto) – Seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . A *borda-4* (resp. *borda-8*) de  $Y$  é o conjunto de todos os pontos de  $Y$  que são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) à pelo menos um ponto de  $Y^c$ .  $\square$

**Definição 7.19** (borda-4 e borda-8 entre duas componentes conexas) – Seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . A *borda-4* (resp. *borda-8*) de uma componente 8-conexa (resp. 4-conexa)  $C$  de  $Y$ , relativamente a uma componente 4-conexa (resp. 8-conexa)  $C'$  de  $Y^c$  é o conjunto dos pontos em  $C$  que são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) de um ponto em  $C'$ .  $\square$

**Proposição 7.6** (conexidade das bordas) – Seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . A borda-4 (resp. borda-8) de uma componente 8-conexa (resp. 4-conexa)  $C$  de  $Y$ , relativamente a uma componente 4-conexa (resp. 8-conexa)  $C'$  de  $Y^c$  é 8-conexa (resp. 4-conexa).  $\square$

**Prova** – Ver [Rosenf79, Capítulo 2].  $\square$

As bordas de um subconjunto podem ser obtidas através do uso do chamado extrator de bordas como vamos o ilustrar em seguida.

**Definição 7.20** (extrator de bordas) – Sejam  $A$  e  $B$  dois elementos de  $\mathfrak{B}_B$ . O operador  $\psi_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados pela composição

$$\psi_{A,B} = \delta_A \sim \varepsilon_B,$$

é chamado de *extrator de bordas de parâmetros  $A$  e  $B$* .  $\square$

Se  $A$  é o singleton que contém a origem e  $B$  é o quadrado ou o losângulo (a cruz)  $3 \times 3$ , então  $\psi_{A,B}$  extrai as bordas relativas às componentes, respectivamente, 4-conexas e 8-conexas de um subconjunto. As Figuras 7.12 e 7.13 ilustram a extração da borda relativamente à uma componente, respectivamente, 4-conexa e 8-conexa.

Uma *curva fechada simples* é um subconjunto 4-conexo (resp. 8-conexo) cujos pontos são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) a dois, e somente dois, outros pontos do subconjunto.

Uma *curva aberta simples* é um subconjunto 4-conexo (resp. 8-conexo) cujos pontos são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) a dois, e somente dois, outros pontos do subconjunto, com exceção de dois pontos que são 4-adjacentes (resp. 8-adjacentes) a um só outro ponto do subconjunto.

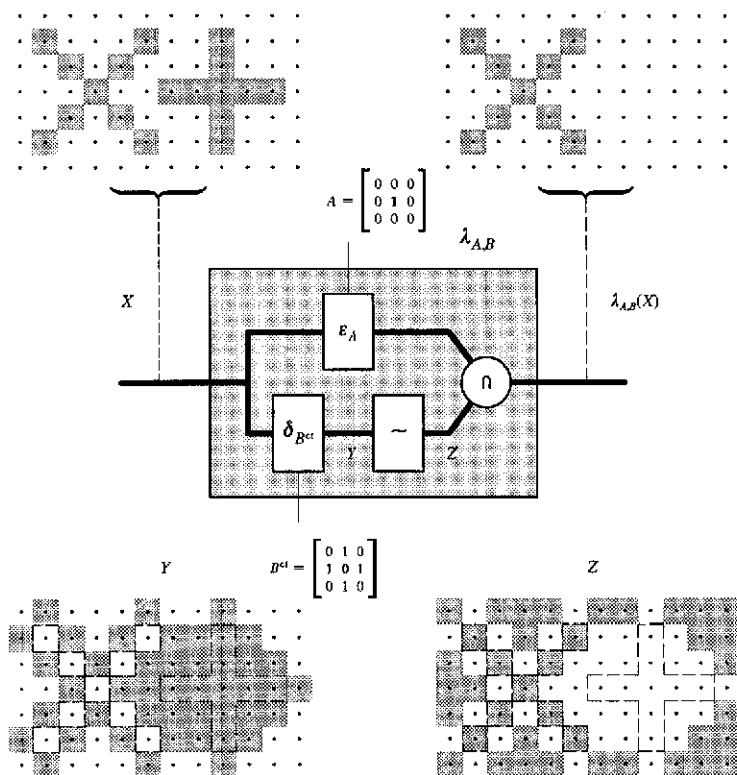


Fig. 7.10 – Operador sup-gerador.

Em 1969, Buneman introduziu a noção de árvore de adjacência para imagens binárias [KonRos89].

**Definição 7.21** (árvore de adjacência de um subconjunto) – A *árvore de adjacência 4* (resp. *8*) de um subconjunto  $Y$  de  $E$  é o grafo cujos vértices são as componentes 8-conexas (resp. 4-conexas) de  $Y$  e as componentes 4-conexas (resp. 8-conexas) de  $Y^c$ , e cujas arestas são os pares formados por duas componentes conexas *4-adjacentes* (resp. *8-adjacentes*), uma sendo de  $Y$  e a outra de  $Y^c$ .  $\square$

Em [Rosenf74] temos uma prova que o grafo mencionado na Definição 7.21 é mesmo uma árvore.

A Figura 7.14 mostra as árvores de adjacência 4 e 8, respectivamente em (b) e (c), do subconjunto  $Y$  mostrado em (a). Os vértices da árvore são coloridos de cinza para as componentes de  $Y$  e de branco para as componentes de  $Y^c$ . Considerando a adjacência 8, o conjunto  $Y$  apresenta um *buraco*

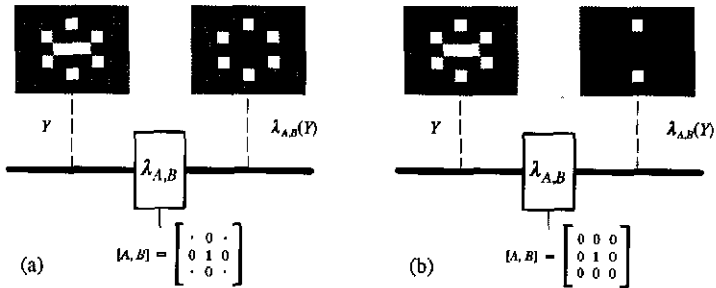


Fig. 7.11 – Extração dos pontos isolados.

Dois subconjuntos com a mesma árvore de adjacência 4 (resp. 8) são chamados de *4-homotópicos* (resp. *8-homotópicos*). Um operador  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  é *4-homotópico* (resp. *8-homotópico*) se e somente se, para todo  $X$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,  $X$  e  $\psi(X)$  são 4-homotópicos (resp. 8-homotópicos). Diz-se de um operador homotópico que ele conserva a *homotopia*.

No estudo dos operadores homotópicos de afinamento e espessamento (ver Capítulo 9) a noção de pontos simples é muito importante.

**Definição 7.22** (pontos 4-simples e 8-simples) – Um ponto  $y$  de um subconjunto  $Y$  de  $E$  é um *ponto 4-simples* (resp. *8-simples*) se e somente se  $Y - \{y\}$  tem o mesmo árvore de adjacência 4 (resp. 8) que  $Y$ .  $\square$

Os candidatos em  $Y$  a ser pontos 4-simples (resp. 8-simples) são os pontos não 4-isolados (resp. 8-isolados) que pertencem a borda-4 (resp. borda-8) de  $Y$ .

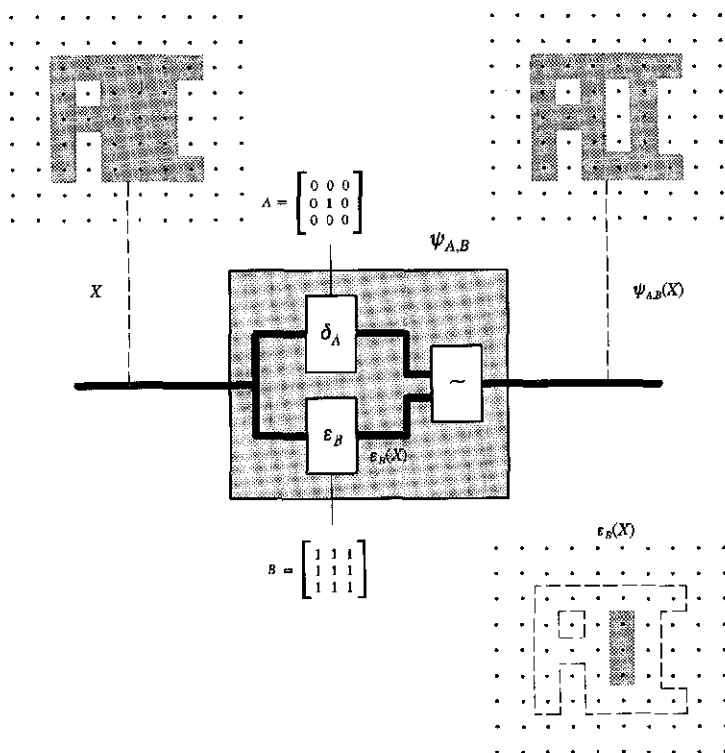


Fig. 7.12 – Borda relativa às componentes 4-conexas.



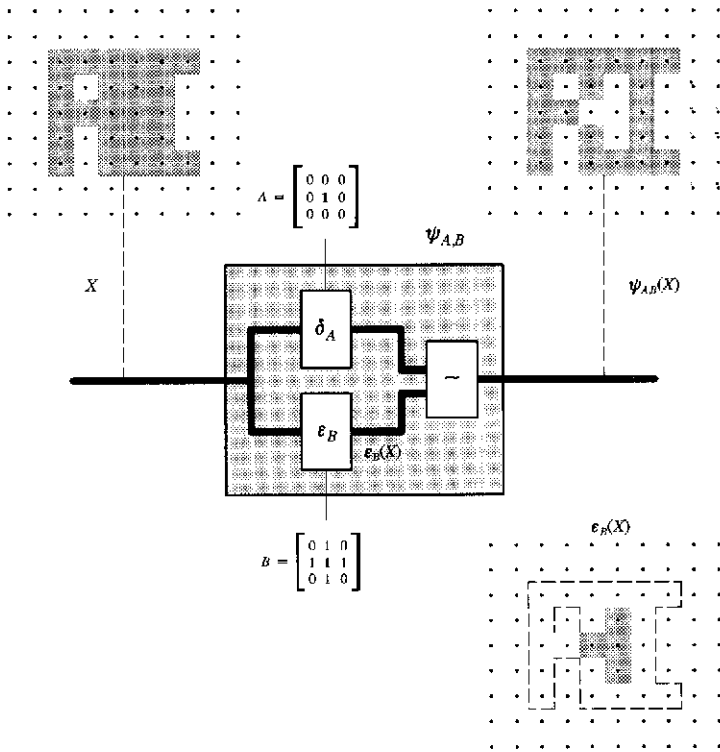


Fig. 7.13 – Borda relativa às componentes 8–conexas.

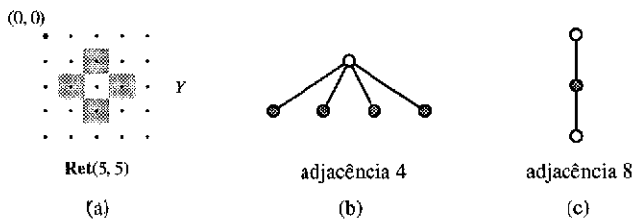


Fig. 7.14 – Árvores de adjacência.



## Capítulo 8

# Máquinas Morfológicas

O paradigma central da Morfologia Matemática é a decomposição de operadores em termos dos operadores elementares (i.e., dilatações, erosões, anti-dilatações e anti-erosões) e das operações de composição, união e interseção.

Esta dinâmica de procedimento pode ser expressa através de uma linguagem formal: a Linguagem Morfológica. As frases desta linguagem serão exatamente as decomposições possíveis para os operadores.

A aplicação da teoria da Morfologia Matemática a problemas reais de análise de imagens requer o desenvolvimento de instrumentos adequados: as Máquinas Morfológicas. Um programa em uma máquina morfológica será equivalente a uma frase da linguagem morfológica.

Neste capítulo, apresentamos a Linguagem Morfológica e discutimos a arquitetura de uma máquina morfológica típica.

### 8.1 Linguagem morfológica

Um aspecto importante da Morfologia Matemática é a descrição de operadores entre subconjuntos pelo uso de uma linguagem formal [BarBan92], chamada de *Linguagem Morfológica (LM)*.

A fim de definir uma *linguagem formal*, precisamos definir uma *gramática* (i.e., um conjunto de regras que definem a sintaxe) e uma *semântica* (i.e., um modelo de interpretação para a gramática). A Tabela 8.1 apresenta uma gramática formal para a LM, usando uma metalinguagem na forma de Backus-Naur [Pagan81]. Nesta tabela, o metasímbolo  $\downarrow \{ \dots \}$  significa um rebaixamento de meia linha.

Tabela 8.1 – GRAMÁTICA DA LM.

```

<operador> ::= <operador elementar> | <limitante> | <composição>
<limitante> ::= <argumento> <operação de reticulado> <argumento>
<argumento> ::= <termo> | <composição>
<termo> ::= <operador elementar> | <limitante>
<composição> ::= <termo> <termo> | <composição> <termo>
<operador elementar> ::= <operador morfológico> | <função estruturante>
<função estruturante> ::= <letra> | <letra> <número>
<número> ::= <dígito> | <número> <dígito>
<operação de reticulado> ::= ∨ | ∧
<operador morfológico> ::= ε | δ | εa | δa
<letra> ::= a | b | c | d
<dígito> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

```

As sentenças que seguem são alguns exemplos de frases da LM:

$$\psi_1 ::= \varepsilon_{a_1} \wedge \delta^a_{b_1}$$

$$\psi_2 ::= \delta_{a_1} \wedge \varepsilon^a_{b_1}$$

$$\psi_3 ::= (\varepsilon_{a_1} \wedge \delta^a_{b_1}) \vee (\varepsilon_{a_2} \wedge \delta^a_{b_2})$$

$$\psi_4 ::= (\delta_{a_1} \wedge \varepsilon^a_{b_1}) \vee (\delta_{a_2} \wedge \varepsilon^a_{b_2})$$

$$\psi_5 ::= \delta_a \varepsilon_a$$

$$\psi_6 ::= (\varepsilon_a \vee \varepsilon_b)(\delta_a \wedge \delta_b).$$

A Figura 8.1 apresenta a árvore sintática para a frase  $\psi_3$ .

A fim de definir formalmente uma semântica para uma gramática, devemos estabelecer um conjunto de funções de interpretação que mapeiam as frases primitivas no domínio de interpretação. A interpretação é criada recursivamente e a ordem de execução das primitivas em uma frase é estabelecida pela gramática [GenNil88]. A Tabela 8.2 apresenta a definição formal de uma semântica para a gramática apresentada na Tabela 8.1.

Tabela 8.2 – SEMÂNTICA DA LM.

```

 $\mathcal{I}[a] \equiv f \in \mathcal{P}(E)^E$ 
 $\mathcal{I}[\delta_a] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \{y \in E : (\mathcal{I}[a])^y(y) \cap X \neq \emptyset\} \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 
 $\mathcal{I}[\varepsilon_a] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \{y \in E : \mathcal{I}[a](y) \subset X\} \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 
 $\mathcal{I}[\delta^a] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \{y \in E : (\mathcal{I}[a])^y(y) \cap X \neq \emptyset\}^c \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 
 $\mathcal{I}[\varepsilon^a] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \{y \in E : \mathcal{I}[a](y) \subset X\}^c \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 
 $\mathcal{I}[\phi] \equiv \mathcal{I}[\phi]$ 
 $\mathcal{I}[\phi_1 \vee \phi_2] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \mathcal{I}[\phi_1](X) \cup \mathcal{I}[\phi_2](X) \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 
 $\mathcal{I}[\phi_1 \wedge \phi_2] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \mathcal{I}[\phi_1](X) \cap \mathcal{I}[\phi_2](X) \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 
 $\mathcal{I}[\phi \cdot \phi_2] \equiv \psi \in \mathcal{P} : \psi(X) = \mathcal{I}[\phi_1](\mathcal{I}[\phi_2](X)) \quad (X \in \mathcal{P}(E))$ 

```

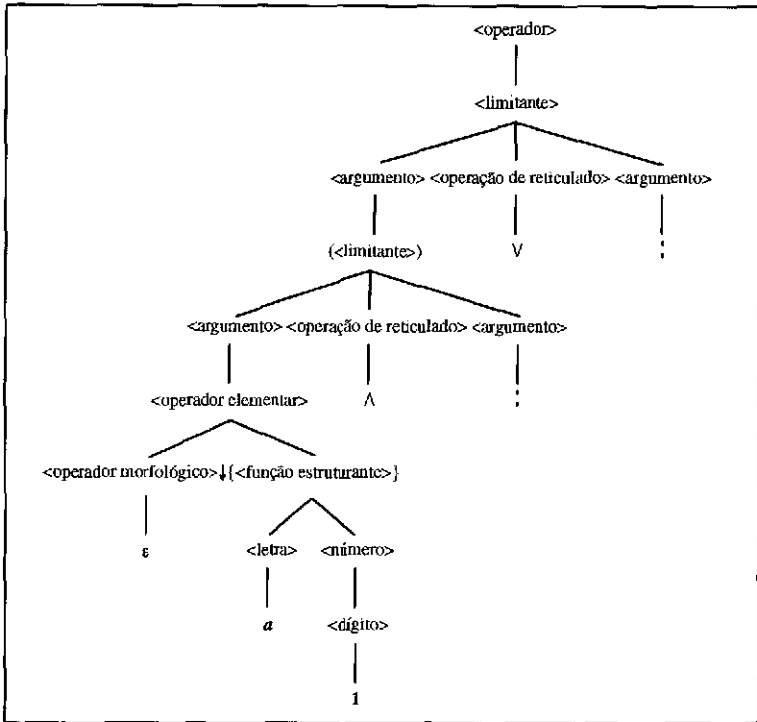


Fig. 8.1 – Árvore sintática de uma frase.

Deixe  $\mathcal{I}$  denotar as funções de interpretação dos subconjuntos do conjunto de frases gerado pela gramática em  $\mathcal{P}(E)^{\mathcal{P}(E)}$ . A Figura 8.2 ilustra a interpretação semântica de uma frase  $\psi$  avaliada em  $X$ , que corresponde a uma dilatação invariante por translação de  $X$  pelo losângulo (a cruz)  $3 \times 3$  centrado na origem.

Uma característica importante das frases da LM é que elas são construídas por cadeias de operadores elementares, ligados pelas operações de união, interseção e composição de operadores (ver Capítulo 3).

A LM é um linguagem completa (i.e., qualquer operador entre subconjuntos pode ser representado como uma frase desta linguagem) e expressiva (i.e., muitos operadores úteis podem ser construídos usando relativamente poucos operadores elementares). Podemos garantir que a LM é completa, pois qualquer operador entre subconjuntos pode ser representado por formas canônicas [BanBar90], similares àquelas apresentadas para a decomposição de operadores i.t., e essas formas são frases válidas da LM.



Fig. 8.2 – Semântica de uma frase avaliada num subconjunto.

### 8.2 Elementos estruturantes primitivos

Nos capítulos anteriores mostramos como os operadores elementares podem ser usados para construir uma extensa classe de operadores. Nesta seção, mostramos como esses operadores elementares podem ser decompostos em termos de uma pequena subfamília de operadores elementares. Na próxima seção, mostramos como essa propriedade pode ser explorada para o desenvolvimento de Máquinas Morfológicas mais eficientes.

Chamamos de *quadrado elementar* o quadrado  $3 \times 3$ , isto é, o subconjunto  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e de *elemento estruturante primitivo* um subconjunto qualquer do quadrado elementar. Verificamos que qualquer subconjunto  $B$  pode ser representado pela união de translados  $B_i + u_i$  de elementos estruturantes primitivos  $B_i$ , isto é,  $B = \bigcup_i B_i + u_i$ . A Figura 8.3 ilustra esta propriedade.

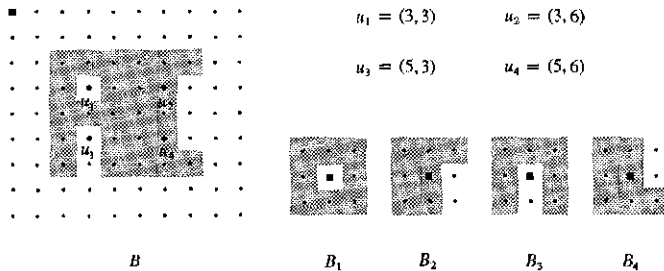


Fig. 8.3 – Decomposição em termos de subconjuntos do quadrado elementar.

Observe que o translado  $B + u$  de qualquer subconjunto  $B$  por qualquer vetor  $u$  pode ser realizado por composições de dilatações de  $B$  pelos elementos estruturantes primitivos  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , denotados, respectivamente, por  $L$  (leste),  $O$  (oeste),  $N$  (norte) e  $S$  (sul). Por exemplo,  $B + (2,3) = \delta_{3L}(\delta_{2S}(B))$ .

Estes fatos e as propriedades  $\delta_{B_1}\delta_{B_2} = \delta_{B_1 \oplus B_2}$  e  $\delta_{B_1} \vee \delta_{B_2} = \delta_{B_1 \cup B_2}$ , estudadas no Capítulo 4, garantem que qualquer dilatação i.t. pode ser realizada através de composições e uniões de dilatações por elementos estruturantes primitivos. Por exemplo, a dilatação pelo elemento estruturante  $B$  da Figura 8.3 pode ser expressa por

$$\delta_B = \delta_{3L}\delta_{3S}\delta_{B_1} \vee \delta_{6L}\delta_{3S}\delta_{B_2} \vee \delta_{3L}\delta_{5S}\delta_{B_3} \vee \delta_{6L}\delta_{5S}\delta_{B_4}.$$

Observe ainda, que esta estratégia pode ser usada para sintetizar qualquer forma  $B$ , pois  $\delta_B(\{o\}) = B$ .

Em particular, pode-se provar que qualquer dilatação por um subconjunto convexo pode ser construída *sequencialmente*, através de composições de dilatações por elementos estruturantes primitivos [Xu91]. Um subconjunto de  $\mathbb{Z}^2$  é convexo se ele é a interseção de todos os semi planos a 0, 45, 90 e 135 graus que o contém.

Por exemplo, a dilatação pelo elemento estruturante  $B$  da Figura 8.4 pode ser expressa por  $\delta_B = \delta_{B_1}\delta_{B_2} \dots \delta_{B_7}$ .

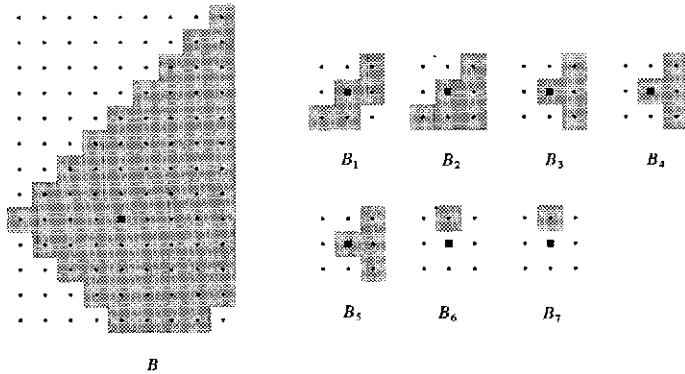


Fig. 8.4 – Decomposição de um subconjunto convexo.

Seja  $E$  um subconjunto de  $\mathbb{Z}^2$ . Um operador elementar é dito *localmente condicionalmente invariante por translação* ou *localmente c.i.t.*, se existem dois subconjuntos, um subconjunto  $B$  de  $E \oplus E^1$ , e um subconjunto  $M$  de  $E$ , tal que sua função estruturante  $b$  seja definida por, para todo  $y$  em  $E$ ,

$$b(y) = \begin{cases} (B + y) \cap E & \text{se } y \in M \\ \emptyset & \text{c.c..} \end{cases}$$

O subconjunto  $M$  é denominado *máscara do operador*.

A dilatação, a erosão, a anti-dilatação e a anti-erosão localmente c.i.t. que têm  $b$  como função estruturante serão denotadas, respectivamente, por  $\delta_{B,M}$ ,  $\varepsilon_{B,M}$ ,  $\delta^a_{B,M}$  e  $\varepsilon^a_{B,M}$ .

Seja  $(M_i)_{i \in I}$  uma partição de  $E$ , seja  $(B_i)_{i \in I}$  uma família de  $\mathcal{P}(E \oplus E^1)$  e seja  $b$  a função estruturante definida por  $b(y) = (B_i + y) \cap E$  se  $y \in M_i$ , então, pela Proposição 3.12,

$$\delta_b = \bigvee_{i \in I} \delta_{B_i, M_i}.$$

Desta forma, as dilatações localmente c.i.t. podem ser usadas como protótipos para a construção de qualquer dilatação.

Ainda, em muitas situações práticas, uma dilatação pode ser construída a partir de dilatações localmente c.i.t. que têm elementos estruturantes primitivos. Esta propriedade decorre do fato que

$$\delta_{B_1, M_1} \vee \delta_{B_2, M_2} = \delta_{B_1 \cup B_2, M_1 \cup M_2}$$

e que, em muitas situações práticas,

$$\delta_{B_1, M_1} \delta_{B_2, M_2} = \delta_{B_1 \oplus B_2, M_1 \oplus M_2}.$$

Trocando o operador dilatação pelo operador erosão e a operação de união pela operação de interseção, encontramos resultados duais para todas as propriedades apresentados nesta seção.

A Figura 8.5 ilustra a construção de uma erosão adaptativa a partir de erosões localmente c.i.t.. A imagem apresentada corresponde a vista em perspectiva de uma estrada. Devido ao efeito da perspectiva, os trechos da estrada que estão mais próximos do observador aparecem maiores do que os que estão mais afastados. Para que esta mudança de escala seja considerada, o domínio da imagem é particionado, aqui, em três regiões e a cada uma delas é associada um elemento estruturante, que tem a mesma forma dos demais, porém tamanho diferente. Com isto, a erosão respeita de maneira aproximada o efeito de perspectiva, alargando a pista proporcionalmente ao tamanho dos elementos estruturantes.

Lembrando, ainda, que as anti-dilatação e as anti-erosão podem ser construídas, respectivamente, a partir das dilatações e das erosões, todos esses resultados podem ser usados para construir anti-dilatações e anti-erosões.

### 8.3 Descrição de uma Máquina Morfológica

Ainda na década de sessenta, Klein e Serra projetaram a primeira máquina morfológica conhecida: o Texture Analyser [KleSer72]. Desde então, uma família de máquinas similares foram desenvolvidas: desde softwares para computadores convencionais [Läy84; Gratin88; BaBaLo94] até implementações em silício [HuDeBo88; KlePey89] ou tecnologias ópticas [HuJeSa89].



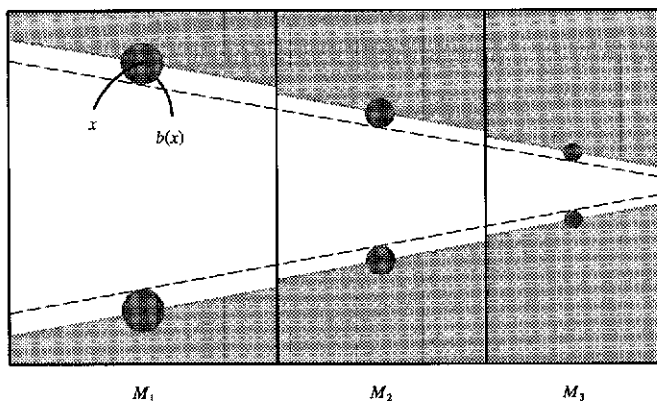


Fig. 8.5 – Erosão adaptativa.

Diremos que uma linguagem formal  $L1$  é *equivalente* a uma linguagem formal  $L2$ , se para cada frase de  $L1$  existe uma frase de  $L2$  com a mesma semântica e, inversamente, se para cada frase de  $L2$  existe uma frase de  $L1$  com a mesma semântica. Hoje em dia, uma *Maquina Morfológica (MMach)* é conceituada como uma implementação de uma linguagem formal equivalente a LM.

O usuário enxerga uma MMach como uma linguagem de programação, que dispõe de funções primitivas (i.e., interseção, união, complementação, dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão) e estruturas de controle (do, while, if). Um *programa da MMach* nesta linguagem corresponde a uma frase da LM.

O tipo de dado a ser transformado por uma MMach é a imagem binária. Outros tipos de dados auxiliares que aparecem são os elementos estruturantes primitivos e os números inteiros não negativos. Os elementos estruturantes primitivos são os parâmetros das dilatações e erosões localmente c.i.t., enquanto os números inteiros são úteis para o controle de procedimentos iterativos.

Usualmente, por uma questão de eficiência, os operadores de dilatação e erosão são implementados a partir dos respectivos operadores localmente c.i.t., caracterizados por elementos estruturantes primitivos. A partir da dilatação e da erosão, assim criadas, são formadas, respectivamente, a anti-dilatação e a anti-erosão.

Normalmente, estas máquinas dispõem internamente também de recursos para realizar operações sobre os elementos estruturantes primitivos, como a rotação em torno da origem central e a complementação. Observe que a transposição é exatamente uma rotação de 180 graus em torno da origem

A característica central da arquitetura de uma MMach típica é a existência de um processador dedicado para efetuar dilatações, erosões, união, interseção, complementação e comparação de igualdade entre imagens. Este processador é conhecido como *processador morfológico*. A arquitetura desta máquina conta também com dispositivos para aquisição, visualização e armazenamento volátil ou permanente de imagens, além de um processador central que controla todos esses recursos.

A comparação entre imagens é um recurso importante para a implementação de procedimentos iterativos com um número de iterações indefinido a priori. Neste caso, o número de iterações é estabelecido a partir de algum critério de convergência de uma sequência de imagens.

A Figura 8.6 apresenta a arquitetura de uma MMach [Beuche87]. Esta máquina conta com cinco planos

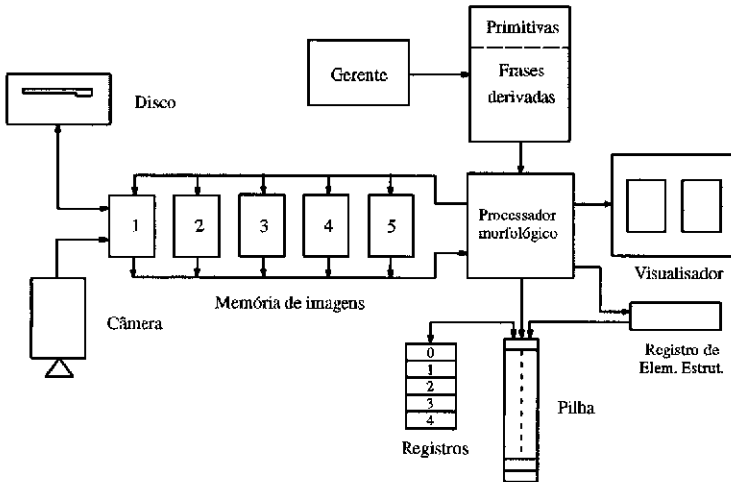


Fig. 8.6 – Arquitetura de uma máquina morfológica.

de memória para o armazenamento de imagens, um processador morfológico, uma pilha para o armazenamento de números inteiros e instruções, cinco registros auxiliares que trocam dados com a pilha e um registro para armazenar um elemento estruturante primitivo, além de dispositivos para a aquisição, armazenamento permanente e visualização de imagens. Todos estes recursos são controlados por um microprocessador de 16 bits.

A dinâmica de uso típico desta máquina envolve: a aquisição pela câmera de uma imagem binária externa; o armazenamento da imagem adquirida no plano de imagem 1; a visualização da imagem adquirida; a programação da máquina para extrair a informação desejada; a execução do programa implementado; o armazenamento em disco dos resultados intermediários e final.

A execução do programa, que é armazenado na pilha, promove a troca de dados entre a pilha e os registros, define os elementos estruturantes usados e estabelece o fluxo de imagens entre os planos de memória e o processador morfológico.

A Figura 8.7 apresenta a estrutura interna do processador morfológico, que é composto por seis processadores internos. Não existem muitas variantes de arquitetura para os processadores de união, interseção, complementação e comparação de igualdade. As nuances mais interessantes aparecem nos processadores de dilatação e erosão.

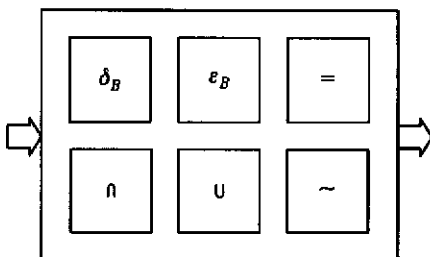


Fig. 8.7 – Processador morfológico.

Os processadores de dilatação e erosão usualmente são compostos por uma família de processadores idênticos, chamados, respectivamente, *processadores primitivos de dilatação* e *processadores primitivos de erosão*, que realizam, respectivamente, dilatações e erosões c.i.t. por elementos estruturantes primitivos. Esses processadores são organizados em “*pipeline*”, em *paralelo*, ou em configurações *híbridas* (“*pipeline*”-paralelo) e podem atuar simultaneamente sobre a mesma imagem ou sobre imagens distintas. Em algumas arquiteturas conhecidas, são disponíveis recursos de programação que permitem ao usuário redefinir a disposição dos processadores primitivos. A Figura 8.8 apresenta um processador de dilatação, composto por uma família de  $kl$  processadores primitivos, organizados em  $k$  “*pipelines*” paralelos, cada um composto por  $l$  processadores primitivos.

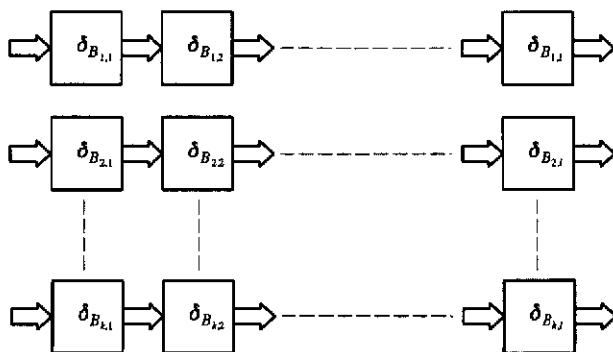


Fig. 8.8 – Processadores de dilatação em “pipelines” paralelos.

Alguns exemplos de processadores morfológicos são o processador do “Cellular Computer” [Stern82], desenvolvido na Universidade de Michigan, o processador do sistema MORPHOPERICOLOR [Bilode86] e o CHIP de tecnologia VLSI [KlePey89], ambos desenvolvidos na École des Mines de Paris.

Os processadores primitivos de dilatação e erosão podem ser implementados em duas classes de arquiteturas: uma baseada em translações e uniões ou interseções e outra baseada em operações lógicas de vizinhança. A primeira são implementações das expressões, para todo  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\delta_B(Y) = \left( \bigcup_{b \in B} (Y + b) \right) \cap E \quad \text{e} \quad \varepsilon_B(Y) = \left( \bigcap_{b \in B} (Y - b) \right) \cap E$$

e a segunda das expressões, para todo  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\delta_B(Y) = \{x \in E : (B^t + x) \cap Y \neq \emptyset\} \quad \text{e} \quad \varepsilon_B(X) = \{y \in E : (B + y) \cap E \subset X\}.$$

Na Figura 8.9, apresentamos um processador primitivo de dilatação e erosão que tem uma arquitetura baseada em translações e uniões ou interseções de planos de bits. Cada ponto do elemento estruturante vai causar uma translação da imagem original e a união ou interseção destas translações será a imagem de saída. O processador conta com um dispositivo para controle de translação, uma matriz, com as mesmas dimensões das imagens, de portas lógicas OR/AND que atuam em paralelo e três planos de bits: um para as imagens transladadas, um para o elemento estruturante e um para o acúmulo dos resultados, intermediários e final. Uma característica dessa arquitetura é que todas as operações primitivas usadas (translações e uniões ou interseções) são operações globais, isto é, se aplicam simultaneamente sobre toda a imagem.

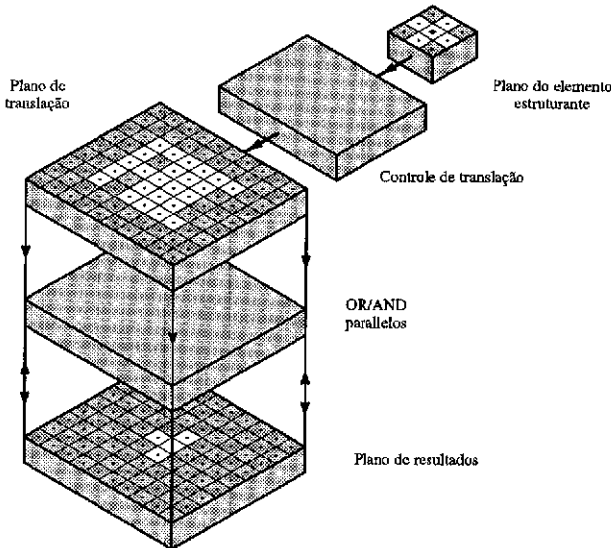


Fig. 8.9 – Processador primitivo baseado em operações globais.

Na Figura 8.10 apresentamos um processador primitivo de dilatação e erosão que tem uma arquitetura baseada no deslocamento de uma matriz  $3 \times 3$ , representando o elemento estruturante primitivo, sobre a imagem e na comparação dos valores lógicos dos elementos dessa matriz com os valores dos correspondentes elementos de matrizes  $3 \times 3$  extraídas da imagem.

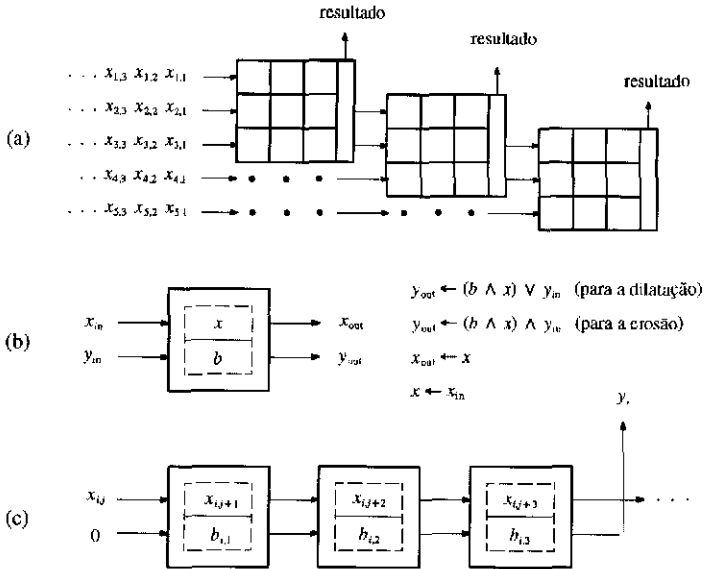


Fig. 8.10 – Processador primitivo baseado em operações de vizinhança. (a) Fluxo de dados. (b) Célula elementar. (c) Conexão entre células.

A imagem fluirá em blocos de três linhas consecutivas, de forma que cada linha da imagem seja a linha central de exatamente um bloco, por um processador que efetua a comparação entre a matriz extraída da imagem e o elemento estruturante.

Este processador é denominado *processador celular*, pois é composto por 9 células de processamento interligadas. Cada uma das células recebe dois valores lógicos como entrada e produz dois valores lógicos de saída, seguindo as equações apresentadas na Figura 8.10 (b). A variável  $x$  corresponde ao valor do pixel da imagem que é transmitido para a saída da célula sem ser modificado, enquanto a variável  $y$  corresponde a ponderação do estado anterior dessa variável com o resultado da comparação entre o valor de um pixel da imagem e o valor de um ponto do elemento estruturante.

As 9 células são interligadas em três sistemas de três células cada um, conforme esquematizado na Figura 8.10 (c). A saída desses três sistemas vão alimentar a entrada de portas lógicas OR, no caso da dilatação, e portas lógicas AND, no caso da erosão, produzindo o resultado da ação do processador celular.

Para introduzir características de paralelismo à esta arquitetura, pode-se usar um conjunto de processadores celulares dispostos como esquematizado na Figura 8.10 (a). O limite do potencial de paralelismo dessa arquitetura é atingido quando é reservado um processador celular distinto para cada linha da imagem.

Uma característica dessa arquitetura é que as operações efetuadas pelos processadores celulares são operações de vizinhança, isto é, dependem apenas de pontos vizinhos. Este tipo de arquitetura pertence a classe das arquiteturas sistólicas, que são bem adaptadas para implementações em CHIPS de tecnologia VLSI [Song84].

A decomposição sequencial de elementos estruturantes tem implicação na complexidade das implementações da dilatação e da erosão. Usualmente, a implementação de sequências de dilatações e erosões é mais simples do que a equivalente implementação direta. Vamos verificar essa afirmação medindo a complexidade de implementações diversas.

Seja  $B$  um dos elementos estruturantes apresentados na Figura 8.11. Na Tabela 8.3 apresentamos um

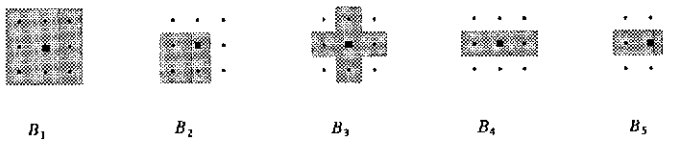


Fig. 8.11 – Alguns elementos estruturantes típicos.

estudo da complexidade da implementação da dilatação e da erosão por  $nB$  no processador da Figura 8.9 [Marago85]. A medida de complexidade adotada é, respectivamente, o número de operações OR–paralelos efetuadas ou, equivalentemente, o número de uniões entre planos de bits e o número de operações AND–paralelos ou, equivalentemente, o número de interseções entre planos de bits. A primeira coluna da tabela identifica o elemento estruturante  $B$ , a segunda apresenta a medida de complexidade para a implementação direta da dilatação por  $nB$ , a terceira a complexidade para a implementação sequencial de  $n$  dilatações por  $B$  e a quarta a complexidade para a implementação sequencial de  $n$  dilatações por  $B$ , onde cada dilatação por  $B$  é implementada como duas dilatações sequenciais.

Tabela 8.3 – COMPLEXIDADE DAS IMPLEMENTAÇÕES.

Elem. Estruturante	Implementação 1	Implementação 2	Implementação 3
$B_1$	$4n^2 + 4n$	$8n$	$4n$
$B_2$	$n^2 + 2n$	$3n$	$2n$
$B_3$	$2n^2 + 2n$	$4n$	–
$B_4$	$2n$	$2n$	–
$B_5$	$n$	$n$	–

Examinando a Tabela 8.3, observamos que a complexidade da implementação diminui à medida que a decomposição sequencial se acentua. Por exemplo, no caso da dilatação ou erosão por um quadrado  $7 \times 7$ , a primeira implementação envolve 48 operações, a segunda 24 e a terceira apenas 12. Notamos também que essa economia fica mais significativa à medida que o número de pontos do elemento estruturante a ser decomposto cresce.

Os processadores dedicados comparados com as máquinas convencionais são, por um lado, muito eficientes e, por outro lado, muito caros. Por essa razão existem muitos softwares para máquinas convencionais que emulam máquinas morfológicas. Normalmente, o uso de hardware dedicado fica restrito às aplicações que exigem resposta em tempo real, enquanto o uso de emulações ocorre nas outras aplicações, menos exigentes em termos de desempenho dos processadores.

Uma aplicação que normalmente exige resposta em tempo real é o controle de qualidade de produtos industrializados. Os produtos a serem inspecionados são dispostos sobre uma esteira rolante e passam por uma câmera estrategicamente colocada, que alimenta uma máquina morfológica. Esperasse que o sistema trate os dados e forneça um diagnóstico sobre o produto em um intervalo de tempo suficientemente pequeno para não afetar o fluxo de objetos pela esteira.

Uma classe de aplicações menos exigente com relação ao tempo de resposta é a análise de imagens geológicas, como, por exemplo, a estimativa da porcentagem de volumes ociosos em uma rocha. A execução deste tipo de tarefa exige que um especialista observe por um microscópio óptico sistematicamente dezenas de lâminas e identifique em cada uma as cavidades presentes. Este trabalho pouco criativo normalmente consome várias horas do especialista, que poderiam ser usadas em tarefas mais nobres. Assim, uma resposta confiável após alguns minutos de processamento é considerado um resultado muito razoável.

Outro tipo de aplicação que não exige resposta em tempo real é o projeto de programas que solucionam problemas de tempo real. Quando um especialista em Morfologia Matemática recebe um problema novo de Análise de Imagens ele precisa fazer uma série de experimentos sobre as imagens adquiridas até poder propor uma solução satisfatória. Para este tipo de tarefa o tempo de resposta é considerado razoável quando não influe no rendimento do trabalho do especialista, o que é um requisito bem menos forte, por exemplo, do que não interromper o fluxo de produtos por uma esteira. Uma vez encontrada uma solução para o problema de Análise de Imagens, resta verificar se ela é viável, isto é, se, quando fosse implementada em uma máquina mais eficiente, atenderia os requisitos de desempenho. Isto é feito calculando-se a performance que o programa teria no ambiente real a partir da performance medida no ambiente de projeto e do conhecimento prévio da relação entre as performances das duas máquinas.

O núcleo dos softwares que emulam máquinas morfológicas são as funções que emulam o processador morfológico. Estas funções serão usadas intensivamente e, portanto, devem ser otimizadas ao máximo. Com essa motivação já foram propostos vários algoritmos para a implementação dessas funções. Esses algoritmos se dividem em duas classes: os algoritmos baseados em operações globais [PipTan89; LiaWon92; Gratin93] e os algoritmos baseados em operações de vizinhança [VliBea88; Schmit89; Ornell92].

Todos os algoritmos que serão apresentados usam a estrutura de dados matricial para representar as imagens ou partes delas. As matrizes serão implementadas como um vetor (ou "array"). Um elemento qualquer da matriz será disposto no vetor segundo a sua distância da origem, medida como o comprimento do caminho percorrido da origem até o elemento, caminhando sobre as linhas da matriz da esquerda para a direita e de cima para baixo (ver Seção 4.1). Considerando uma matriz  $A$  de  $m \times n$  posições e um vetor  $V$  de  $mn$  elementos, temos  $A(i, j) = V(in + j)$  ( $i \in \{0, \dots, m - 1\}$  e  $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ ). Denominaremos *endereço de um elemento* a sua posição no vetor, por exemplo, o endereço do elemento  $A(i, j)$  é  $in + j$ .

A forma convencional de representar uma imagem binária é como uma matriz cujos elementos são os pixels da imagem. A partir dessa estrutura de dados pode-se estabelecer algoritmos baseados em operações globais ou operações de vizinhança, simplesmente pela implementação direta das definições das operações e operadores [Barrer87]. Embora essas algoritmos sejam muito simples, eles se mostram pouco eficientes. A complexidade dos algoritmos que realizam as operações é proporcional às dimensões da ima-

gem, enquanto a complexidade dos algoritmos que realizam os operadores de dilatação e erosão é proporcional ao produto das dimensões da imagem pelo cardinalidade do elemento estruturante.

**Exercício 8.1** (algoritmos convencionais para operadores elementares) – Usando como estrutura de dados para representar as imagens uma matriz de pixels, implemente os operadores de dilatação e erosão por elementos estruturantes primitivos. □

Os algoritmos que não usam a estrutura de dados convencional serão chamados *algoritmos rápidos*. Dentre os algoritmos rápidos baseados em operações globais, o mais popular é aquele que representa vários pixels consecutivos de uma linha compactados em uma única palavra. A Figura 8.12 ilustra o uso desta estrutura de dados para representar uma imagem binária.

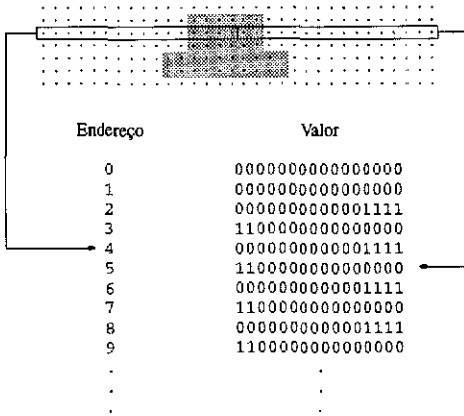


Fig. 8.12 – Representação compactada de uma imagem binária.

O fato que esse tipo de algoritmo explora é o paralelismo intrínscio dos processadores convencionais de palavras de 16, 32 ou 64 bits. Cada vez que uma palavra de *n* bits é processada ocorrem *n* operações lógicas em paralelo, uma para cada bit da palavra. Uma vez que nessa estrutura de dados cada bit representa um pixel, *n* pixels são tratados em paralelo.

Na Tabela 8.4 apresentamos o algoritmo que realiza a união entre imagens binárias, compactadas em palavras de 16 bits. A complexidade desse algoritmo é dezesseis vezes menor do que a complexidade de um algoritmo que representa cada pixel em uma palavra diferente.

Na Tabela 8.5 apresentamos um algoritmo que realiza a erosão pelo elemento estruturante  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nesta Tabela, a notação *P SHR 1* representa a operação de translação da palavra *P* de 1 bit para a direita. A dinâmica desse algoritmo é a mesma do processador morfológico apresentado na Figura 8.9, ou seja, a translação horizontal de imagens por valores definidos pelo elemento estruturante e a interseção dessas translações. O ponto crítico deste algoritmo é a operação de translação entre palavras vizinhas: é preciso garantir que o primeiro pixel da palavra receba o último pixel da palavra vizinha (contando no sentido da



translação) e que os demais recebam os bits vizinhos dentro da própria palavra. Este cuidado exige algumas operações lógicas adicionais, que impedem que a complexidade do algoritmo caia 16 vezes.

Tabela 8.4 – ALGORITMO DE UNIÃO DE DUAS IMAGENS BINÁRIAS.

```

• Dados
  -  $X$  e  $Y$  são as imagens binárias compactadas  $m \times (n/16)$  a unir.
  -  $Z$  é a imagem binária compactada  $m \times n$  resultante.
• Laço principal
  Para  $i$  de 0 à  $m - 1$ 
    Para  $j$  de 0 à  $n/16 - 1$ 
       $Z(in + j) \leftarrow X(in + j) \text{ OR } Y(in + j)$ 
    Fimpara
  Fimpara

```

A extensão deste algoritmo para um elemento estruturante qualquer, que seja um subconjunto do quadrado elementar é simples, basta considerar cumulativamente todos os sentidos de translação definidos pelo elemento estruturante. Note que as translações na direção vertical não têm os problemas apontados para as horizontais.

Tabela 8.5 – ALGORITMO DE EROSIÃO POR UM SEGMENTO HORIZONTAL DE TAMANHO 1.

```

• Dados
  -  $X$  é a imagem binária compactada  $m \times (n/16)$  original.
  -  $Z$  é a imagem binária compactada  $m \times (n/16)$  resultante.
  -  $carry$  é uma variável auxiliar de 16 bits.
• Laço principal
  Para  $i$  de 0 à  $m - 1$ 
     $carry \leftarrow 0$ 
    Para  $j$  de 0 à  $n/16 - 1$ 
       $Z(in + j) \leftarrow ((X(in + j) \text{ SHR } 1) \text{ OR } carry) \text{ AND } X(in + j)$ 
      Se  $((X(in + i) \text{ AND } 1) = 0)$  então
         $carry \leftarrow 0$ 
      Senão
         $carry \leftarrow 2^{15}$ 
    Fimsc
  Fimpara
Fimpara

```

**Exercício 8.2** (algoritmos rápidos para operadores elementares) – Usando como estrutura de dados para representar as imagens uma matriz de pixels compactados, implemente os operadores de dilatação e erosão por elementos estruturantes primitivos. □

Uma *fila* é uma estrutura de dados, que organiza os objetos sequencialmente segundo a ordem de inserção. O modelo intuitivo de uma fila é o de uma fila de espera em que as pessoas no início da fila são servidas primeiro e as pessoas que chegam entram no fim da fila. Existe uma ordem linear para filas que é a “ordem de chegada”. Um possível conjunto de operações, definido para um tipo abstrato de dados FILA, é definido na Tabela 8.6 [Zivian93].



operação sobre a imagem, para computar o interior da imagem resultante, é preciso também realizar operações sobre filas, para computar os pixels das bordas da imagem resultante.

Apesar da estrutura híbrida levar a algoritmos para as operações menos eficientes que os convencionais, o ganho obtido nos operadores de dilatação e erosão garante um ganho de eficiência global do processador. O ganho de eficiência é acentuado sobremaneira na realização de operadores formados pela composição de dilatações e erosões

A Tabela 8.7 apresenta um algoritmo para a união de imagens representadas na estrutura de dados híbrida. O algoritmo é composto por dois blocos principais: computação do interior da imagem resultante e computação da borda da imagem resultante. A computação da borda também é dividida em dois blocos: computação dos pixels que não estão no interior, respectivamente, das imagens de entrada  $X$  e  $Y$ .

Tabela 8.7 – ALGORITMO DE UNIÃO DE DUAS IMAGENS BINÁRIAS.

<p>• <b>Dados</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\hat{X}</math> e <math>\hat{Y}</math> são o interior das imagens binárias <math>m \times n</math> a unir.</li> <li>– <math>\hat{Z}</math> é o interior da imagem binária <math>m \times n</math> resultante.</li> <li>– <math>\partial X</math>, <math>\partial Y</math> e <math>\partial Z</math> são as filas dos pixels das bordas das imagens.</li> <li>– <i>address</i> é uma variável auxiliar de 16 bits.</li> </ul> <p>• <b>Função</b></p> <p>filtrafila(<math>\partial X, \hat{Y}, \partial Z</math>)</p> <p>Enquanto vazio(<math>\partial X</math>) = false faça</p> <p style="padding-left: 2em;"><i>address</i> ← desinfileira(<math>\partial X</math>)</p> <p style="padding-left: 2em;">Se <math>\hat{Y}(\textit{address}) = 0</math> então</p> <p style="padding-left: 4em;">enfileira(<i>address</i>, <math>\partial Z</math>)</p> <p style="padding-left: 2em;">Fimse</p> <p style="padding-left: 2em;">Fimpara</p> <p>• <b>Computa <math>\hat{Z}</math></b></p> <p>Para <math>i</math> de 0 à <math>m - 1</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Para <math>j</math> de 0 à <math>n - 1</math></p> <p style="padding-left: 4em;"><math>\hat{Z}(in + j) \leftarrow \hat{X}(in + j)</math> OR <math>\hat{Y}(in + j)</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Fimpara</p> <p style="padding-left: 2em;">Fimpara</p> <p>• <b>Computa <math>\partial Z</math></b></p> <p>filtrafila(<math>\partial X, \hat{Y}, \partial Z</math>)</p> <p>filtrafila(<math>\partial Y, \hat{X}, \partial Z</math>)</p>
---

A Tabela 8.8 apresenta um algoritmo de erosão por um quadrado elementar para imagens representadas na estrutura de dados híbrida. O algoritmo consiste, para cada pixel da fila de pixels de borda da imagem original, em eliminar os pixels do interior da imagem original que fazem parte da vizinhança do pixel e enfileira-los em uma nova fila, que conterá os pixels da borda da imagem resultante. Este algoritmo pode ser generalizado para erosões e dilatações por elementos estruturantes primitivos quaisquer [Orneil92].

**Exercício 8.3** (algoritmos rápidos para operadores elementares) – Usando como estrutura de dados para representar as imagens um par formado por uma matriz, que representa os pixels do interior da imagem, e uma lista, que representa os pixels da borda da imagem, implemente os operadores de dilatação e erosão por elementos estruturantes primitivos. □

**Exercício 8.4** (algoritmos para operadores primitivos) – Compare o desempenho das implementações realizadas dos Exercícios 8.1 a 8.3. □

Em todas as classes de algoritmos descritas, os elementos estruturantes costumam ser representados por uma estrutura de dados que contém a cardinalidade do conjunto e os valores das coordenadas de cada ponto. Para otimizar um pouco mais os algoritmos de dilatação e erosão, podemos armazenar as coordenadas dos pontos em registradores e implementar um trecho de código específico para elementos estruturantes com número de pontos diferentes, de zero a nove.

O uso apenas de elementos estruturantes primitivos, além de ser suficiente para realizar qualquer operador elementar e, em muitos casos, levar a decomposições mais simples, permite também otimizar a implementação dos processadores primitivos de dilatação e erosão, pelo uso da informação a priori do tamanho limite dos elementos estruturantes. Por essas razões, a maior parte das MMach's conhecidas dispõem apenas de processadores primitivos de dilatação e erosão que realizam esta classe de operadores.

Tabela 8.8 – ALGORITMO DE EROSAO PELO QUADRADO ELEMENTAR.

<p>• <b>Dados</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\tilde{X}</math> é o interior das imagens binárias <math>m \times n</math> original e resultante.</li> <li>- <math>\partial X</math> e <math>\partial Y</math> são as filas dos pixels das bordas, respectivamente, da imagem original e resultante.</li> </ul> <p>• <b>Laço principal</b></p> <p>Enquanto <math>\text{vazio}(\partial X) = \text{false}</math> faça  <math>\text{adress} \leftarrow \text{desinfileira}(\partial X)</math>          Para todo <math>i \in \{-1, 0, 1\}</math> faça            Para todo <math>j \in \{-1, 0, 1\}</math> faça              Se <math>\tilde{X}(\text{adress} - i + j) = 1</math> então                <math>\text{enfileira}(\text{adress}, \partial Y)</math>                <math>\tilde{X}(\text{adress} - i + j) \leftarrow 0</math>              Fimse            Fimpara          Fimpara          Fimquando</p>
--

Como os operadores que desejamos implementar são operadores c.i.t. e os elementos estruturantes são escolhidos como subconjuntos do quadrado elementar, chegamos a nove regiões da imagem com comportamento peculiar: uma central, quatro laterais e quatro cantos.

Mais precisamente, como foi visto na Seção 8.2, um operador elementar c.i.t. pelo quadrado elementar pode ser decomposto em união (no caso da dilatação) ou interseção (no caso da erosão) de nove operadores elementares (da mesma classe) localmente c.i.t. definidos por nove elementos estruturantes  $B_i$  e nove máscaras  $M_i$  especificando nove regiões do domínio da imagem.

A Figura 8.14 apresenta essas nove regiões e o valor, em cada uma delas, dos  $B_i$ . Para otimizar ainda mais o algoritmo, usualmente, cada uma dessas regiões têm tratamento especial.

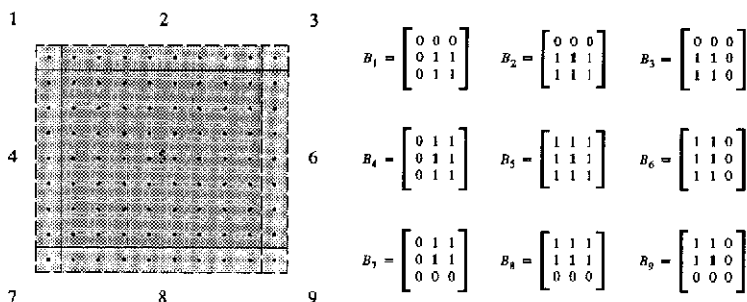


Fig. 8.14 – As nove regiões da imagem.

As MMach's, implementadas em hardware ou emuladas em software, vão ser enxergadas pelo usuário através de uma linguagem de programação. Nas máquinas morfológicas que temos conhecimento as funções primitivas dessa linguagem acionam diretamente o processador morfológico, porém, em máquinas mais sofisticadas, elas poderiam acionar uma camada inferior de software, que realizaria a decomposição dos operadores elementares em termos de erosões e dilatações localmente c.i.t. por elementos estruturantes primitivos e distribuiria a execução desses operadores pelos processadores primitivos.

Hoje em dia, o projeto de programas para resolver problemas de análise de imagens ainda exige que o especialista desenvolva muitos experimentos computacionais antes de chegar a um resultado satisfatório. A partir do resultado de um experimento, ele identifica problemas no seu programa, tenta corrigi-lo e efetua um novo experimento para verificar se o efeito da modificação foi o esperado, e assim vai evoluindo, até chegar a uma solução. Esta dinâmica de trabalho impõe certos requisitos para as interfaces homem-máquina das MMach's.

A interface homem-máquina de uma MMach deve prover um ambiente que permita a edição e a execução ágil de programas, que podem depender de uma família de outros programas implementados em momentos anteriores da sessão de trabalho ou mesmo em outras sessões de trabalho. Ainda, essas facilidades de programação não podem penalizar sensivelmente o desempenho dos programas.

Dois tipos de ambientes que atendem a esses requisitos costumam ser adotados como interface homem-máquina para as MMach's: um baseado em uma linguagem interpretada e outro baseado em uma linguagem de programação visual.

As linguagens interpretadas são bem adaptadas para a implementação e execução ágeis de programas, especialmente aquelas linguagens que permitem o uso de qualquer programa existente como uma nova função. O fato dos programas não precisarem passar por uma fase de compilação e poderem reaproveitar facilmente programas existentes são pontos importantes que contribuem para o aumento da produtividade do desenvolvimento de software.

Um ponto negativo no uso de linguagens interpretadas é que os programas não ficam tão eficientes quanto poderiam. Por exemplo, um conjunto de comandos que se repete várias vezes é interpretado toda vez que é executado, o que naturalmente é uma causa de desperdício de tempo. A solução que se costuma adotar é usar linguagens que tanto podem ser compiladas como interpretadas, isto é, para cada função existente o programador pode escolher se quer compila-la ou interpreta-la. Com esse recurso o especialista

pode estabelecer um compromisso ideal entre a produtividade de desenvolvimento de software e a velocidade de execução dos programas, de forma a minimizar o tempo global de projeto (i.e., implementação e testes). Naturalmente, essas linguagens dispõem também de editores de texto integrados.

Uma outra propriedade importante das linguagens interpretadas é que todos os objetos criados durante a execução dos programas continuam disponíveis para o especialista. Assim, é possível acompanhar facilmente todos os estados desejados dos programas, o que é um recurso essencial para o projeto interativo de programas.

Existem várias MMach's que têm esse tipo de interface [Bilode86; Schmit86; Beuche87; Gratin88]. A Tabela 8.9 mostra a implementação de um programa, que realiza  $n$  erosões sucessivas por um mesmo elemento estruturante fixo e apresenta as imagens original e resultante, na linguagem interpretada que é a interface homem-máquina do sistema MORPHOPERICOLOR. Esta linguagem é similar ao Forth, na verdade, é um subconjunto do Forth incrementado com as funções de gerenciamento dos recursos do sistema (processador morfológico, aquisição, visualização, etc.). Este tipo de linguagem é bem adaptado para arquiteturas como a da Figura 8.6, porque implementações interessantes do Forth podem ser obtidas usando uma pilha como estrutura de dados central [Loelig81].

Tabela 8.9 – COMPOSIÇÃO DE  $N$  EROÇÕES EM UMA LINGUAGEM INTERPRETADA.

```

:nerosão
  OUTPUT IS      /* declaração */
  INPUT IE
  PARAM N

  IE IS MOVE     /* procedimento */
  N 1
  DO
    IS IS ERODE
  LOOP
  IE DISPLAY
  IS DISPLAY

```

Outro tipo de interface bem adaptada para as MMach's são as linguagens de programação visual [Chang87; RaArSa90]. Este tipo de interface permite que o usuário interaja graficamente com o sistema para uso dos recursos e programação. O paradigma principal deste tipo de linguagem é descrever programas como grafos orientados. As arestas dos grafos representam os caminhos que os dados devem percorrer e os nós as funções que os transformam. A exemplo das linguagens procedurais, as linguagens visuais também dispõem de recursos avançados como mecanismos de controle e definição de subprogramas.

As linguagens visuais são bem adequadas para a programação rápida de pequenos programas compostos por chamadas de outros programas existentes e também permitem a fácil observação dos estados internos dos programas executados. Por outro lado, elas não são adequadas para o desenvolvimento de programas complexos que dependem de muitos outros programas visuais. A solução adotada é sempre usar uma linguagem procedural compilada em conjunto com uma linguagem visual. Com esses recursos em mãos, o especialista pode estabelecer uma relação de compromisso ideal entre as duas alternativas.

O sistema KHOROS [RaArSa90] é um sistema para processamento de imagens em ambientes padrões UNIX e XWINDOW, que tem uma interface de programação visual e usa a linguagem C como linguagem procedural.

Na estrutura do KHOROS os operadores são representados por funções, escritas em C, que são agrupadas em uma biblioteca e por programas principais que chamam estas funções. Muitas destas funções são criadas pelo encadeamento de outras funções da biblioteca e para cada função da biblioteca existe um programa principal, que chama apenas essa função. Nesta estrutura, a linguagem de programação visual tem o mesmo papel dos recursos de programação em batch do UNIX, isto é, controla a chamada de programas principais. Naturalmente, o KHOROS também dispõe de recursos avançados para a edição de programas em C, a geração de interfaces visuais e a instalação das novas funções na biblioteca.

A "toolbox" MMach [BaBaLo93], que desenvolvemos em colaboração com o professor Roberto de Alencar Lotufo, é uma máquina morfológica que usa a plataforma KHOROS. No apêndice A, apresentamos uma descrição mais completa dessa "toolbox".

A Figura 8.15 exemplifica o uso da "toolbox" MMach, apresentando um programa visual que executa  $n$  erosões sucessivas por um mesmo elemento estruturante e apresenta as imagens original e resultante.

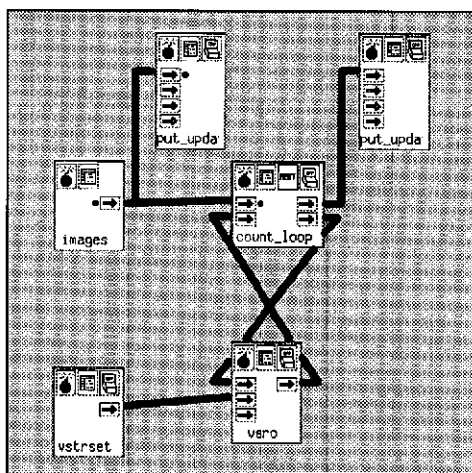


Fig. 8.15 – Composição de  $n$  erosões em uma linguagem visual.





## Capítulo 9

# Caixa de ferramentas da Morfologia

## Matemática

Ao longo das últimas três décadas a Morfologia Matemática tem sido aplicada intensivamente a problemas de análise de imagens. Esses experimentos propiciaram o desenvolvimento de uma família de operadores úteis para a identificação de propriedades geométricas de imagens binárias: a caixa de ferramentas da Morfologia Matemática. Neste capítulo, estudamos alguns desses operadores, que podem ser entendidos como frases da LM ou, equivalentemente, programas de uma MMach.

Os operadores parametrizados por elementos estruturantes primitivos são chamados *operadores primitivos*. Os programas de uma MMach podem ser organizados hierarquicamente, conforme a sua decomposição em termos de operadores primitivos de dilatação e de erosão. Os programas mais complexos são aqueles que envolvem um número maior desses operadores primitivos. Assim, tomando uma ordem crescente de complexidade, definimos as seguintes famílias de programas: programas básicos, programas de níveis 1, 2 e 3.

Os programas do nível básico são os operadores primitivos de dilatação e de erosão, e as operações de união, interseção, complemento e subtração.

### 9.1 Programas de nível 1

Os programas do nível 1 são construídos usando no máximo uma vez cada programa do nível básico.

Alguns programas do nível 1 são: a anti-dilatação, a anti-erosão, os operadores de abertura e de fechamento morfológico, os operadores sup-gerador e inf-gerador, a dilatação e a erosão condicional, e o extrator de borda.

No *extrador de bordas* (ver Capítulo 7)  $\psi_{A,B} = \delta_A \sim \varepsilon_B$ , se  $A$  é o singleton que contém a origem e  $B$  o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$  então  $\psi_{A,B}$  extrai as *bordas internas*. Analogamente, se  $A$  é o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$  e  $B$  é o singleton que contém a origem, então  $\psi_{A,B}$  extrai as *bordas externas*. Se  $A$  e  $B$  são ambos o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$ , então  $\psi_{A,B}$  extrai a união das bordas internas e externas, e é chamado de *gradiente morfológico*.

**Definição 9.1** (gradiente morfológico) – Seja  $A$  o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$ , o operador sobre  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\psi_{A,A} = \delta_A \sim \varepsilon_A$ , é chamado de *gradiente morfológico*.  $\square$

Em Análise de Imagens, os operadores sup-geradores (ver Capítulo 7) são importantes para reconhecer configurações de pontos. Considerando o caso invariante por translação, a cada padrão ou intervalo fechado  $[A, B]$  de  $\mathcal{P}(E)$  temos associado o operador sup-gerador  $\lambda_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ . Usando a definição de intervalo fechado, temos, então, a seguinte definição equivalente para o operador sup-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$\lambda_{A,B}(X) = \{x \in E : (X - x) \in [A, B]\} \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

Quando  $A$  e  $B^c$  são subconjuntos do quadrado elementar,  $\lambda_{A,B}$  é chamado de *operador sup-gerador primitivo*.

A Figura 9.1 apresenta alguns padrões usualmente empregados. O padrão  $\mathcal{J}_1$  permite identificar os pontos onde um feixe de vetores verticais, orientados de cima para baixo, intercepta os objetos. Os padrões  $\mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$  identificam, respectivamente, os pontos isolados e os buracos puntuais. Os padrões  $\mathcal{J}_4$ ,  $\mathcal{J}_5$  e  $\mathcal{J}_6$  identificam pontos triplos. O padrão  $\mathcal{J}_7$  identifica pontos extremos. O padrão  $\mathcal{J}_8$  identifica quadrados de lado 3.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \begin{bmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \mathcal{J}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{J}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathcal{J}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{J}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{J}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathcal{J}_7 &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{J}_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 9.1 – Alguns padrões empregados em Análise de Imagens.

A rotação em torno da origem dos padrões não simétricos da Figura 9.1 cria outros padrões interessantes, que permitem identificar estruturas geométricas similares rotacionadas. Denotaremos por  $\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^{45}, \mathcal{J}^{90}, \dots, \mathcal{J}^{270}, \mathcal{J}^{315}$  o resultado da rotação no sentido horário de um padrão  $\mathcal{J}$ , respectivamente, de 0, 45, 90, ... 270, 315 graus.

A Figura 9.2 apresenta as rotações por 90, 180 e 270 graus do padrão  $\mathcal{J}_4$  que identifica pontos triplos.

O operador inf-gerador sobre  $\mathcal{P}(E)$  é dual do operador sup-gerador. Usando a definição de intervalo fechado, temos, no caso invariante por translação, a seguinte definição equivalente para o operador inf-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$\mu_{A,B}(X) = \{x \in E : (X^c - x) \notin [A, B]\} \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

$$\mathcal{G}_4^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_4^{90} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_4^{180} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_4^{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 9.2 – Rotações de um padrão.

Analogamente ao operador sup-gerador, o operador inf-gerador serve para reconhecer configurações de pontos que aparecem no complemento da imagem.

Quando  $A$  e  $B^c$  são subconjuntos do quadrado elementar,  $\mu_{A,B}$  é chamado de *operador inf-gerador primitivo*.

**Definição 9.2** (afinamento e espessamento) – Sejam  $A$  e  $B$  dois elementos de  $\mathcal{P}(E \oplus E^t)$  tais que  $A \subset B$ . Os operadores  $\sigma_{A,B}$  e  $\tau_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados pelas seguintes composições,

$$\sigma_{A,B} = \iota \sim \lambda_{A,B} \text{ e } \tau_{A,B} = \iota \vee \lambda_{A,B},$$

são chamados, respectivamente, de *afinamento* e de *espessamento de parâmetros A e B*. □

No afinamento e no espessamento, os pixels da imagem transformada posicionados na origem de estruturas identificadas receberão, respectivamente, o valor 0 e o valor 1, enquanto os demais continuarão com o mesmo valor que tinham na imagem original. As Figuras 9.3 e 9.4 apresentam, respectivamente, um exemplo de afinamento e de espessamento.

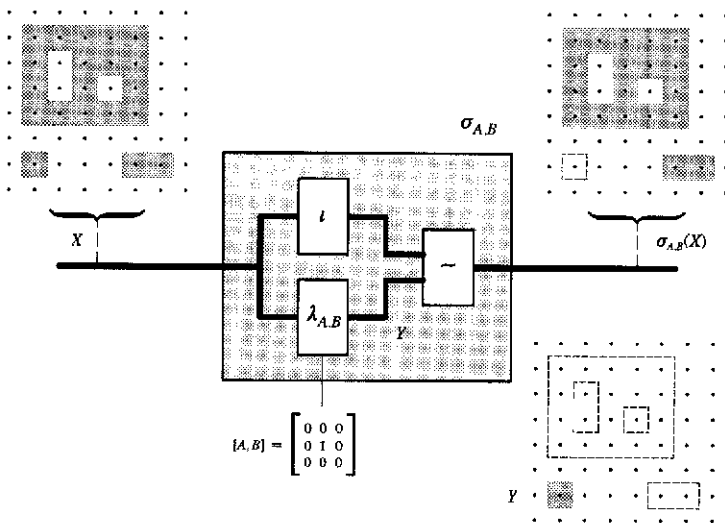


Fig. 9.3 – Afinamento.

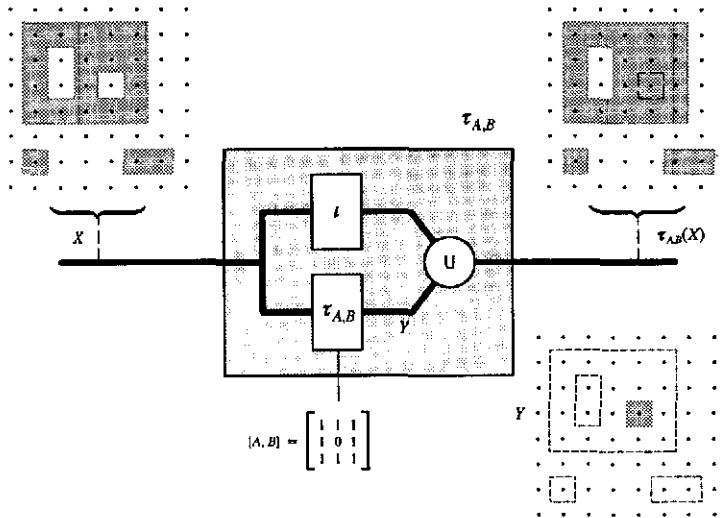


Fig. 9.4 – Espessamento.

O afinamento de uma imagem e do seu complemento pelo padrão  $\mathfrak{J}_3$  da Figura 9.1 produzem, respectivamente, as bordas internas e externas da imagem.

O afinamento e o espessamento podem ser operadores homotópicos ou não, dependendo da escolha dos subconjuntos  $A$  e  $B$ . Como consequência do Teorema 4.1 em [KonRos89, p. 367], podemos estabelecer, no caso de  $A$  e  $B^c$  serem subconjunto do quadrado elemental centrado na origem, a seguinte regra para testar a homotopia destes operadores: o afinamento  $\sigma_{A,B}$  ou o espessamento  $\tau_{A,B}$  é um operador

$4$ -homotópico (resp.  $8$ -homotópico) se, para todo  $X \in [A, B]$ , os subconjuntos  $X \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $X^c \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  são não vazios e, respectivamente,  $8$ -conexo (resp.  $4$ -conexo) e  $4$ -conexo (resp.  $8$ -conexo).

Essa regra garante que apenas pontos simples da imagem e do fundo sejam modificados pelos operadores de afinamento e de espessamento homotópicos. A condição de que a restrição dos subconjuntos extraídos do intervalo  $[A, B]$  e seus respectivos complementos sejam não vazias garante que os pontos modificados sejam pontos de borda (interna ou externa), mas não sejam pontos isolados ou buracos pontuais. A condição de conexidade garante que os pontos de borda modificados não alterem a árvore de adjacência da imagem.

As Figuras 9.3, 9.4 e 9.5, e 9.6 apresentam exemplos de aplicações de afinamento e de espessamento, respectivamente, não  $4$ -homotópico e  $4$ -homotópico (ou  $8$ -homotópico).

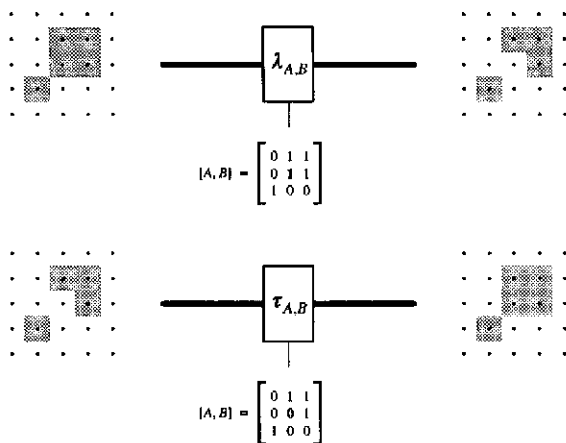


Fig. 9.5 – Afinamento e espessamento não homotópico.

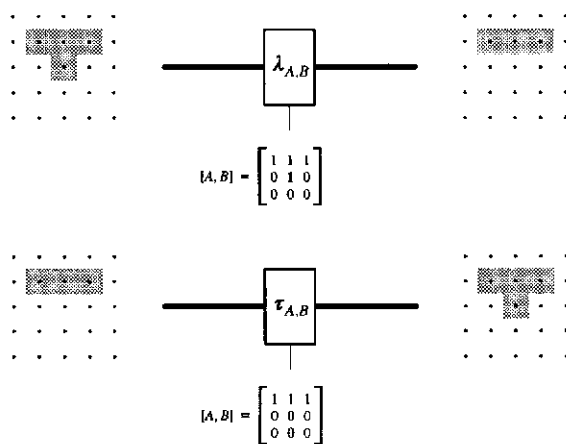


Fig. 9.6 – Afinamento e espessamento homotópico.

A Figura 9.7 apresenta alguns padrões comumente usados como parâmetros de afinamentos e de espessamentos 4-homotópicos.

$$\mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_5 = \begin{bmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 9.7 – Alguns padrões para afinamentos e espessamentos 4-homotópicos.

O afinamento e o espessamento são dois operadores duais, relacionados pela expressão

$$\sigma_{A,B}^* = \tau_{B^c,A^c}$$

Enquanto o afinamento é um operador anti-extensivo, o espessamento é um operador extensivo. É interessante observar também que estes operadores são ambos não idempotentes [Fried86].

**Definição 9.3** (afinamento e espessamento condicional) – Sejam  $A$  e  $B^c$  dois subconjuntos do quadrado elementar tais que  $A \subset B$ . Seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . Os operadores primitivos  $\sigma_{A,B,Y}$  e  $\tau_{A,B,Y}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados pelas seguintes composições,

$$\sigma_{A,B,Y} = \sigma_{A,B} \vee Y \quad \text{e} \quad \tau_{A,B,Y} = \tau_{A,B} \wedge Y,$$

são chamados, respectivamente, *afinamento e espessamento condicional (ou geodésico) de parâmetros  $A$  e  $B$ , dado  $Y$* .  $\square$

O efeito da restrição à  $Y$  nesses dois operadores é similar ao efeito desta mesma restrição, respectivamente, na erosão e na dilatação condicional.

O afinamento e o espessamento condicional são operadores duais relacionados pela expressão

$$\sigma_{A,B,Y}^* = \tau_{B^c,A^c,Y^c}$$

A Figura 9.8 ilustra a aplicação de afinamentos e espessamentos sucessivos para a restauração e extração das bordas da imagem da moça. O primeiro afinamento elimina os pontos isolados. O espessamento preenche os buracos puntuais. O segundo afinamento extrai as bordas.

**Exercício 9.1** (Caixa de Ferramentas da MM) – Implemente os programas do nível 1 na forma de workspaces do sistema KHOROS, usando os “glyphs” do módulo “tools” e do nível básico da “MMach toolbox”.  $\square$

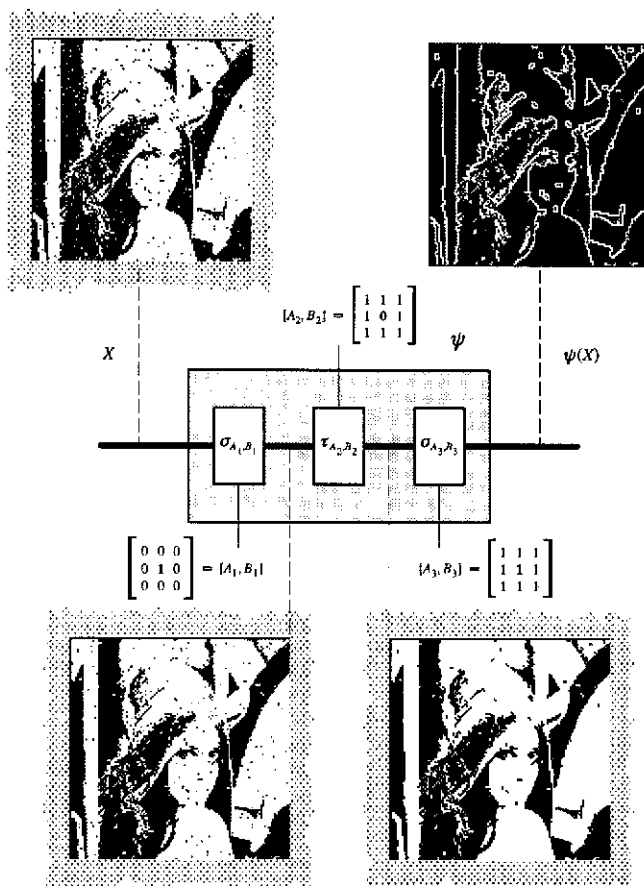


Fig. 9.8 – Restauração e extração de bordas.

## 9.2 Programas de nível 2

Os programas do nível 2 são construídos usando mais de uma vez pelo menos um programa do nível básico.

Seja  $\approx$  a operação definida de  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  em  $\mathcal{P}(E)$  por

$$X \approx Y = (X \sim Y) \vee (Y \sim X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

O conjunto  $X \approx Y$  é chamado de *diferença simétrica entre  $X$  e  $Y$* .

O resultado da diferença simétrica entre dois subconjuntos  $X$  e  $Y$  é o subconjunto formado pelos pontos que estão em  $X$  e não estão em  $Y$  e pelos pontos que estão em  $Y$  e não estão em  $X$ . Como o próprio nome sugere, a diferença simétrica é uma operação comutativa.

**Definição 9.4** (*n*-dilatação e *n*-erosão) – Os operadores primitivos  $\delta_B^n$  e  $\epsilon_B^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados, para  $n > 0$ , pelas seguintes  $n - 1$  composições sucessivas

$$\delta_B^n = (\delta_B)^n \quad \text{e} \quad \epsilon_B^n = (\epsilon_B)^n$$

e, para  $n = 0$ ,  $\delta_B^n = \iota$  e  $\epsilon_B^n = \iota$ ,

são chamados, respectivamente, de *n*-dilatação e *n*-erosão por  $B$ . □

Observamos que  $\delta_B^n$  e  $\epsilon_B^n$  são, respectivamente, equivalentes a dilatação e a erosão por  $nB$ . Se  $B$  é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ou  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , então  $nB$  é um disco de centro na origem e raio  $n$ , segundo, respectivamente, a distância usual na reta na direção horizontal, a distância usual na reta na direção vertical, a distância de quarteirão e a distância do valor máximo [DirRoh72, p. 109]. A Figura 9.9 ilustra a aplicação da erosão por discos, segundo a distância de quarteirão, à imagem da moça.

Os operadores primitivos  $\delta_{B_1, B_2}^{m, n}$  e  $\epsilon_{B_1, B_2}^{m, n}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados, para  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$ , pelas seguintes composições

$$\delta_{B_1, B_2}^{m, n} = \delta_{B_1}^m \delta_{B_2}^n \quad \text{e} \quad \epsilon_{B_1, B_2}^{m, n} = \epsilon_{B_1}^m \epsilon_{B_2}^n,$$

são chamados de *nm*-dilatação e *nm*-erosão por  $B_1$  e  $B_2$ .

De fato,  $\delta_{B_1, B_2}^{m, n}$  e  $\epsilon_{B_1, B_2}^{m, n}$  são, respectivamente, equivalentes a dilatação e a erosão por  $mB_1 \oplus nB_2$ . Se  $B_1$

é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B_2$  é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , então  $mB_1 \oplus nB_2$  é um retângulo de tamanho  $m \times n$ . Se  $B_1$

é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_2$  é igual a  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  então  $mB_1 \oplus nB_2$  é um octógono. Se  $(m, n)$  é igual a  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,

$(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  ou  $(3, 2)$ , então o octógono é um disco Euclidiano discreto de centro na origem e raio  $n + m$ . Para outros valores de  $(m, n)$ , o octógono não é mais o disco Euclidiano discreto. A Figura 9.10 ilustra a aplicação de erosões por discos Euclidianos discretos.

Seja  $\mathfrak{B}$  uma sequência finita de  $n$  elementos estruturantes primitivos  $B_i$ , isto é,  $\mathfrak{B} = (B_i)_{i=1, 2, \dots, n}$ . Os operadores  $\delta_{\mathfrak{B}}$  e  $\epsilon_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições



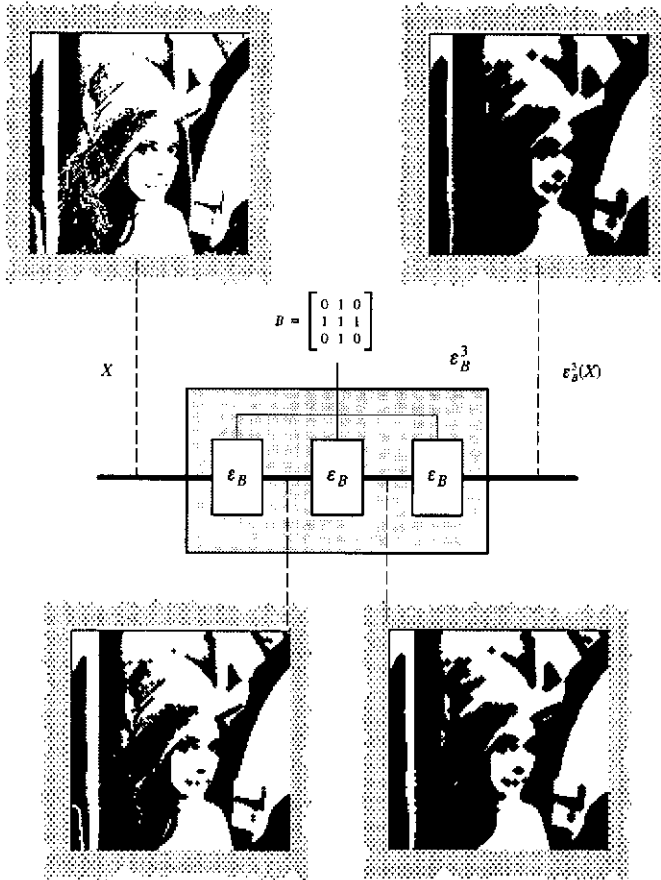


Fig. 9.9 – Erosão por discos, segundo a distância de quarteirão.

$$\delta_{\mathfrak{B}} = \delta_{B_n} \delta_{B_{n-1}} \dots \delta_{B_1} \quad \text{e} \quad \epsilon_{\mathfrak{B}} = \epsilon_{B_n} \epsilon_{B_{n-1}} \dots \epsilon_{B_1}$$

são chamados, respectivamente, de *dilatação convexa* e *erosão convexa* por  $\mathfrak{B}$ . Estes operadores recebem esses nomes, pois realizam dilatações e erosões por subconjuntos convexos.

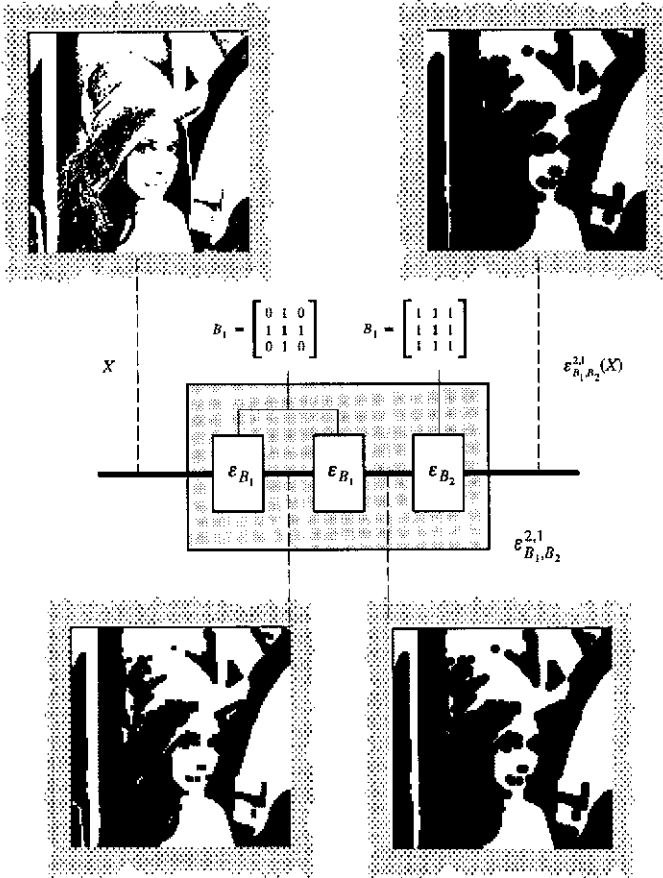


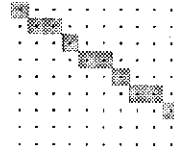
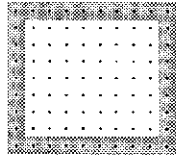
Fig. 9.10 – Erosões por discos Euclidianos discretos.

Seja  $B$  uma seqüência finita de  $n$  seqüências de elementos estruturantes primitivos  $\mathfrak{B}_i$ . Os operadores  $\delta_B$  e  $\varepsilon_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\delta_B = \delta_{\mathfrak{B}_1} \cup \delta_{\mathfrak{B}_2} \cup \dots \cup \delta_{\mathfrak{B}_n}, \quad \varepsilon_B = \varepsilon_{\mathfrak{B}_1} \cap \varepsilon_{\mathfrak{B}_2} \cap \dots \cap \varepsilon_{\mathfrak{B}_n}$$

são chamados, respectivamente, de *dilatação genérica* e *erosão genérica* por  $B$ . Estes operadores recebem esses nomes, porque realizam dilatações e erosões por subconjuntos quaisquer.

Seja  $\mathfrak{B} = (B_i)_{i=1,2,\dots,n}$  e seja  $B_{\mathfrak{B}}$  uma sequência de  $n$  sequências de elementos estruturantes primitivos  $B_i$ , tais que  $\mathfrak{B}_i = (B_j)_{j=1,2,\dots,i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Os operadores  $\delta_{B_{\mathfrak{B}}}$  e  $\varepsilon_{B_{\mathfrak{B}}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  são chamados, respectivamente, *dilatação curva* e *erosão curva* por  $B_{\mathfrak{B}}$ . Estes operadores receberam esses nomes, porque são particularmente úteis para realizar dilatações e erosões por curvas simples que contém a origem. Uma curva simples deste tipo pode ser representada por uma sequência  $\mathfrak{B}$  tal que  $B_i \in \{L, O, N, S, \{o\}\}$ . A Figura 9.11 apresenta duas curvas simples e as respectivas sequências  $\mathfrak{B}$ .



$$\begin{aligned} B_o &= \{o\} \\ B_i &= L \quad i \in \{1, 9\} \\ B_i &= S \quad i \in \{10, 17\} \\ B_i &= O \quad i \in \{18, 26\} \\ B_i &= N \quad i \in \{27, 33\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_o &= \{o\} \\ B_i &= L \quad i \in \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 14\} \\ B_i &= S \quad i \in \{2, 5, 7, 10, 12, 15\} \end{aligned}$$

Fig. 9.11 – Representação de curvas simples.

Na Figura 9.12, o subconjunto  $X$  representa o corte transversal de uma liga metálica vista por um microscópio óptico. Na mesma figura aparecem as erosões sucessivas de  $X$  por um segmento de reta  $B$ , inclinados a 130 graus, de comprimento de 10 pontos. Note que a inclinação do segmento de reta usado como elemento estruturante coincide aproximadamente com a inclinação dos objetos encontrados na imagem.

**Definição 9.5** ( $n$ -abertura e  $n$ -fechamento) – Os operadores primitivos  $\gamma_B^n$  e  $\phi_B^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_B^n = \delta_B^n \varepsilon_B^n \quad \text{e} \quad \phi_B^n = \varepsilon_B^n \delta_B^n,$$

são chamados, respectivamente, de  $n$ -abertura e  $n$ -fechamento por  $B$ . □

Os operadores primitivos  $\gamma_{B_1, B_2}^{n,m}$  e  $\phi_{B_1, B_2}^{n,m}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_{B_1, B_2}^{n,m} = \delta_{B_1, B_2}^{n,m} \varepsilon_{B_1, B_2}^{n,m} \quad \text{e} \quad \phi_{B_1, B_2}^{n,m} = \varepsilon_{B_1, B_2}^{n,m} \delta_{B_1, B_2}^{n,m}.$$

são chamados, respectivamente, de  $nm$ -abertura e  $nm$ -fechamento por  $B_1$  e  $B_2$ .

Os operadores  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\phi_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_{\mathfrak{B}} = \delta_{\mathfrak{B}} \varepsilon_{\mathfrak{B}} \quad \text{e} \quad \phi_{\mathfrak{B}} = \varepsilon_{\mathfrak{B}} \delta_{\mathfrak{B}},$$

são chamados, respectivamente, de *abertura convexa* e *fechamento convexo* por  $\mathfrak{B}$ . A Figura 9.13 ilustra a aplicação de aberturas por discos Euclidianos discretos à imagem de células.

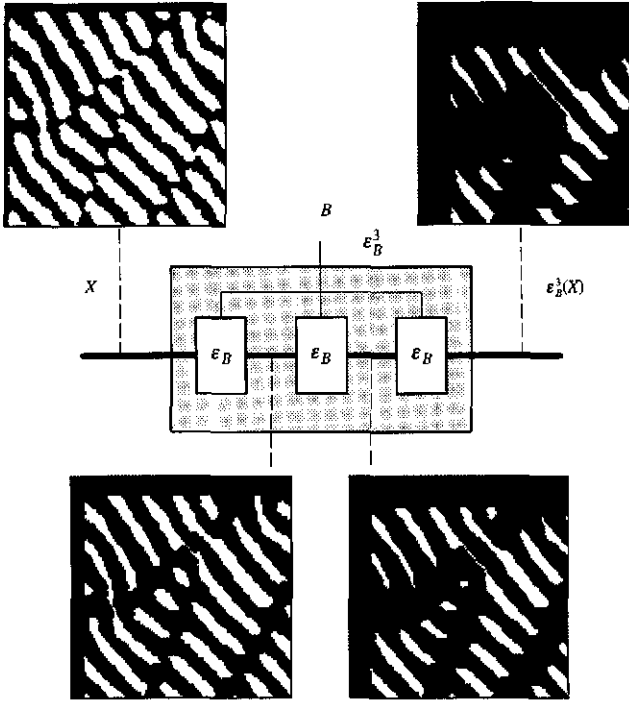


Fig. 9.12 – Erosão por um segmento de reta.

Os operadores  $\gamma_B$  e  $\phi_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_B = \delta_B \varepsilon_B \quad \text{e} \quad \phi_B = \varepsilon_B \delta_B$$

são chamados, respectivamente, de *abertura genérica* e *fechamento genérico* por  $B$ .

Os operadores  $\gamma_{B_\alpha}$  e  $\phi_{B_\alpha}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_{B_\alpha} = \delta_{B_\alpha} \varepsilon_{B_\alpha} \quad \text{e} \quad \phi_{B_\alpha} = \varepsilon_{B_\alpha} \delta_{B_\alpha}$$

são chamados, respectivamente, de *abertura curva* e *fechamento curvo* por  $B_\alpha$ .

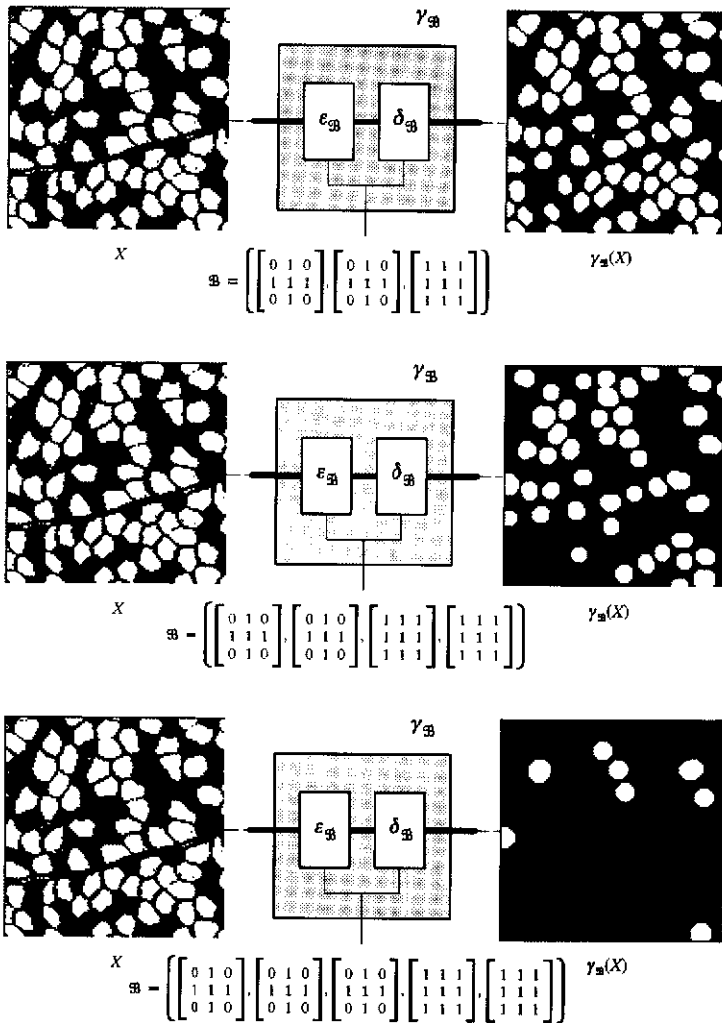


Fig. 9.13 – Abertura por discos Euclidianos discretos.

O operador  $\psi_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\psi_{A,B} = \phi_A \sim \gamma_B,$$

é chamado de *resíduo do fechamento em relação à abertura*. Se  $A$  é o singleton que contém a origem, então  $\psi_{A,B}$  conserva as estruturas da imagens que não contém propriamente translações de  $B$  e é chamado *operador cartola por B*. Se  $B$  é o singleton que contém a origem, então  $\psi_{A,B}$  conserva as estruturas do complemento da imagem que não contém propriamente translações de  $A$ .

O operador  $\psi_{A,\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\psi_{A,\mathfrak{B}} = \phi_A \sim \gamma_{\mathfrak{B}},$$

é chamado de *resíduo do fechamento convexo em relação à abertura convexa*. A Figura 9.14 ilustra a aplicação do resíduo do fechamento pelo singleton que contém a origem em relação a abertura por discos Euclidianos discretos, isto é, do operador cartola por discos Euclidianos discretos.

O operador  $\lambda_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\lambda_{A,B} = \varepsilon_A \wedge \delta_B^a$$

é chamado de *operador sup-gerador genérico*

Seja  $W \subset E$ , se as seqüências de seqüências de elementos estruturantes primitivos,  $A$  e  $B$  representam, respectivamente, os subconjuntos  $A \subset W$  e  $(W - A)^c$ , então  $\lambda_{A,B}$  identifica a forma  $A$  e é chamado *operador de reconhecimento genérico de forma*. A Figura 9.15 ilustra o uso do operador de reconhecimento genérico de forma para a identificação de um disco Euclidiano discreto de raio 3. A seqüência  $B = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_8)$  que aparece nesta figura é definida pelas seguintes seqüências:

$$\mathfrak{B}_1 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]; \quad \mathfrak{B}_2 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right];$$

$$\mathfrak{B}_3 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]; \quad \mathfrak{B}_4 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right];$$

$$\mathfrak{B}_5 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]; \quad \mathfrak{B}_6 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right];$$

$$\mathfrak{B}_7 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]; \quad \mathfrak{B}_8 = \left[ 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right].$$

Em situações práticas, não existe uma única forma de interesse, mas sim, um conjunto de formas que correspondem a pequenas flutuações da forma  $A$ . O operador sup-gerador parametrizado por  $A \ominus B_1$  e  $(W - A \oplus B_2)^c$  permite identificar essas formas e é chamado de *operador de reconhecimento genérico de forma com folga*. A Figura 9.16 ilustra o uso do operador de reconhecimento genérico de formas com folga para a identificação de discos Euclidianos discretos. A seqüência  $B = \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_8\}$  que aparece nesta figura é a mesma da Figura 9.15. Os subconjuntos  $B_1$  e  $B_2$ , usados para criar a folga em torno do disco discreto de raio 3, foram, respectivamente, o losângulo (a cruz)  $3 \times 3$  e o singleton que contém a origem.

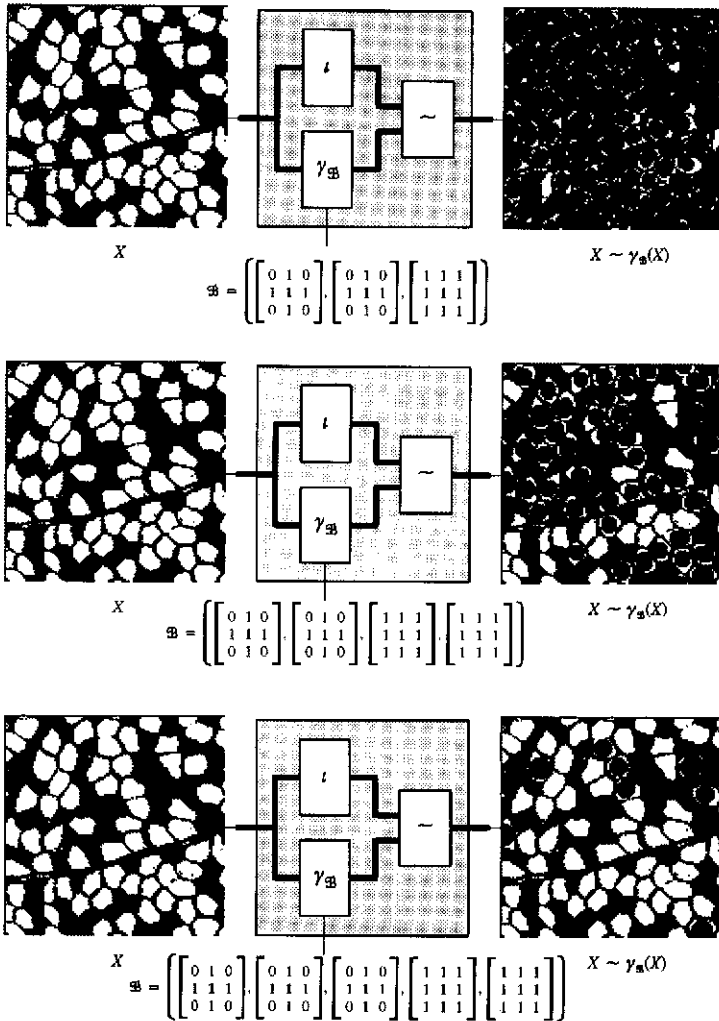


Fig. 9.14 – Operador cartola por discos Euclidianos discretos.

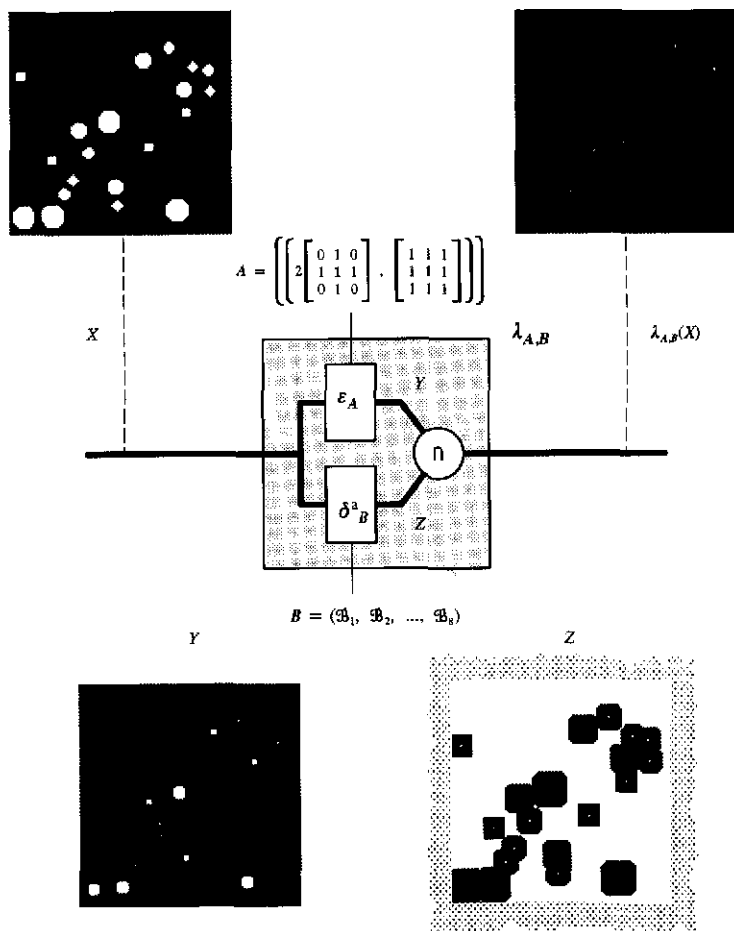


Fig. 9.15 – Reconhecimento genérico de forma.

É interessante observar que se  $E$  é o retângulo  $\text{Ret}(n_1, n_2)$ ,  $A$  representa o singleton que contém a origem e  $B$  representa o subconjunto  $\text{Ret}(n_1, n_2) \cup ((\text{Ret}(n_1, n_2) - ([0, 0] \times [0, n_2 - 1])) - (0, n_2 - 1))$ , então, para todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\lambda_{A,B}(X) = \{(u_1, \min \{x_2 \in [0, n_2 - 1] : (u_1, x_2) \in X\})\},$$



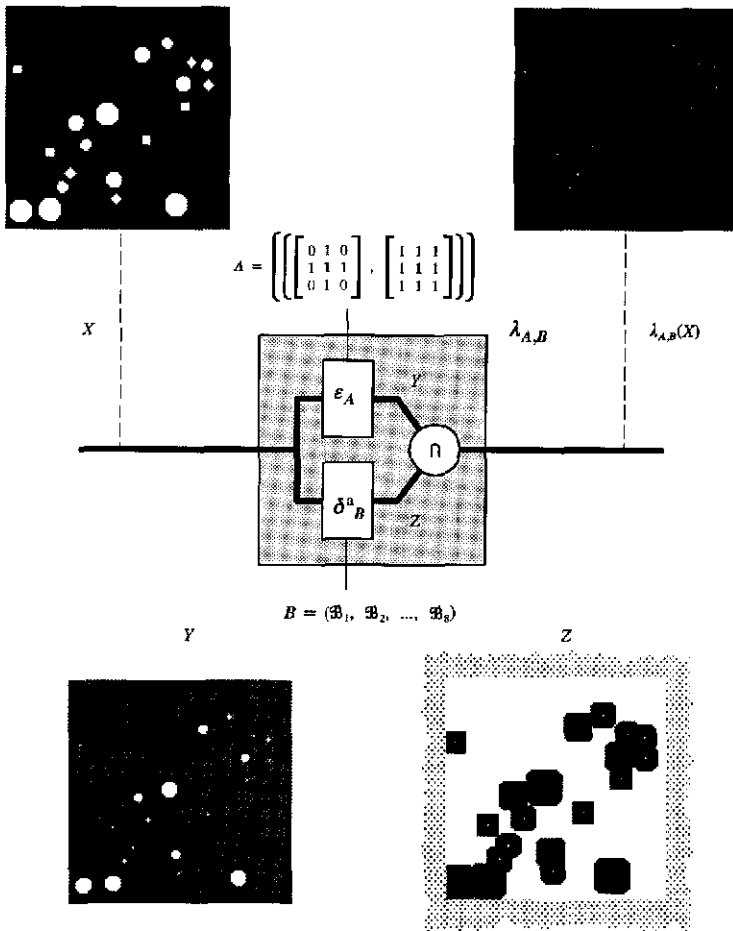


Fig. 9.16 – Reconhecimento genérico de forma com folga.

onde  $u_1 = \min \{x_1 \in [0, n_1 - 1] : (x_1, x_2) \in X\}$ .

Em outros termos, nessas condições,  $\lambda_{A,B}$  identifica o primeiro ponto da imagem  $X$  que encontramos percorrendo a imagem exaustivamente linha a linha, da esquerda para a direita e de cima para baixo, a partir da origem.

**Definição 9.6** (filtro  $n$ -fi-gama e filtro  $n$ -gama-fi) – Os operadores primitivos  $\theta$  e  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\theta = \phi_B^n \gamma_B^n \text{ e } \psi = \gamma_B^n \phi_B^n,$$

são chamados, respectivamente, de *filtro  $n$ - $\phi\gamma$*  e *filtro  $n$ - $\gamma\phi$* . □

As Figuras 9.17 e 9.18 ilustram a aplicação, respectivamente, do filtro  $n$ - $\phi\gamma$  e do filtro  $n$ - $\gamma\phi$  para a restauração da imagem do teclado de uma calculadora, corrompida com ruído aditivo e subtrativo. O operador  $\nu$  representa o agente que provoca a deterioração da imagem por ruído. Observe que o filtro  $n$ - $\phi\gamma$  elimina todo o ruído aditivo, enquanto o filtro  $n$ - $\gamma\phi$  elimina todo o ruído subtrativo. O efeito do filtro  $n$ - $\phi\gamma$  é melhor do que o efeito do filtro  $n$ - $\gamma\phi$ , porque a densidade do ruído aditivo é maior do que a densidade do ruído subtrativo.

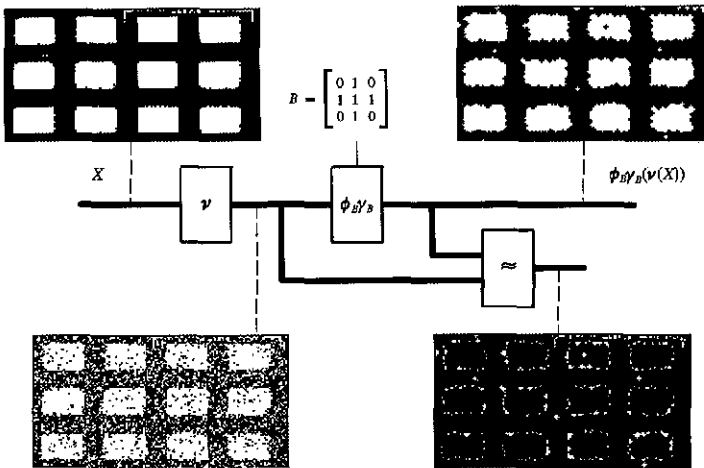


Fig. 9.17 – Restauração por um filtro fi-gama.

**Definição 9.7** (filtro  $n$ -gama-fi-gama e filtro  $n$ -fi-gama-fi) – Os operadores primitivos  $\theta$  e  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\theta = \gamma_B^n \phi_B^n \gamma_B^n \text{ e } \psi = \phi_B^n \gamma_B^n \phi_B^n,$$

são chamados, respectivamente, de *filtro  $n$ - $\gamma\phi\gamma$*  e *filtro  $n$ - $\phi\gamma\phi$* . □

A Figura 9.19 apresenta uma aplicação do filtro  $n$ - $\phi\gamma$  e do filtro  $n$ - $\gamma\phi\gamma$  à uma mesma imagem. Observe que o filtro  $n$ - $\gamma\phi\gamma$  tende a fragmentar mais os objetos do que o filtro  $n$ - $\phi\gamma$ , devido a abertura adicional.

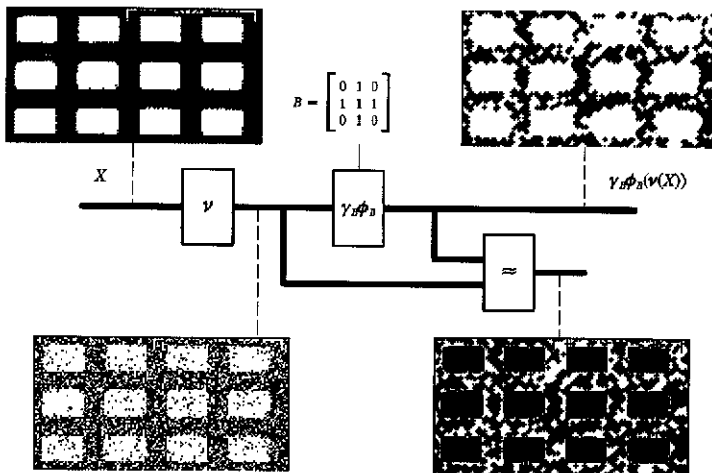


Fig. 9.18 – Restauração por um filtro gama-fi.

Vamos denotar os filtros  $n-\phi\gamma$ ,  $n-\gamma\phi$ ,  $n-\gamma\phi\gamma$  e  $n-\phi\gamma\phi$  por  $B$  genericamente por  $\psi_B^n$ . Seja  $\mathfrak{B}$  uma sequência finita de  $N$  subconjuntos de  $E$ , com elementos  $B_i$  tais que  $B_i \subset B_{i+1}$ . O operador  $\psi_{\mathfrak{B}}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\psi_{\mathfrak{B}}^N = \psi_{B_N}^N \psi_{B_{N-1}}^{N-1} \dots \psi_{B_1}^1,$$

é chamado um *filtro alternado sequencial de parâmetro*  $\mathfrak{B}$ .

A Figura 9.20 apresenta a aplicação do filtro alternado sequencial  $\psi_{\mathfrak{B}}^3$ , construído a partir dos filtros  $n-\phi\gamma$ , para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído, usada nas Figuras 9.17 e 9.18. Observe que este filtro produz objetos com bordas mais suaves do que as bordas dos respectivos objetos produzidos pelo filtro  $1-\phi\gamma$ .

A Figura 9.21 apresenta a aplicação do filtro  $3-\phi\gamma$  a mesma imagem da calculadora, observe que o efeito deste filtro sobre os objetos é muito mais devastador do que o efeito do correspondente filtro alternado sequencial.

Os operadores primitivos  $\psi_{\mathfrak{B}}$  e  $\omega_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  operações

$$\psi_{\mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \varepsilon_{B_i} \text{ e } \omega_{\mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \delta_{B_i},$$

são chamados, respectivamente, de *n-operador canônico isotônico* e *n-operador canônico dual isotônico de parâmetro*  $\mathfrak{B}$ .

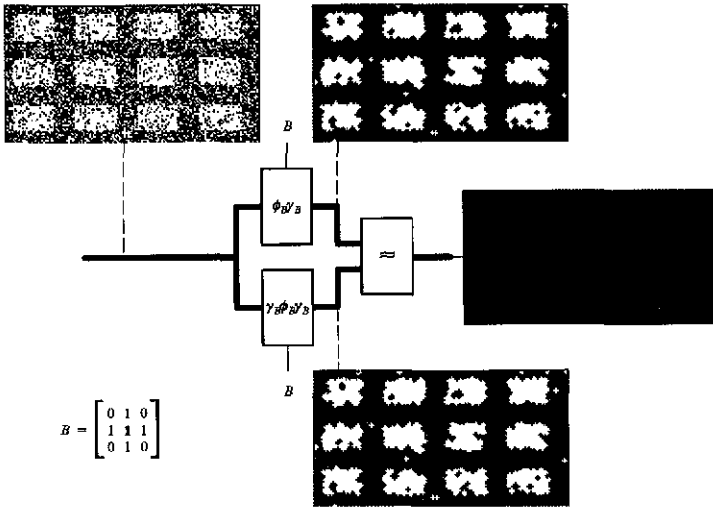


Fig. 9.19 – Comparação entre os filtros fi-gama e gama-fi-gama.

Seja  $B$  um elemento estruturante primitivo e  $n$  um número inteiro positivo tal que  $n \leq \#B$ . O operador  $\psi_{n,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado por

$$\psi_{n,B}(X) = \{x \in E : \#(X \cap B) \geq n\}$$

é chamado de *filtro de ordem  $n$  em relação a vizinhança  $B$* . Se  $\#B$  é um número ímpar e  $n = (\#B + 1)/2$ , então o operador  $\psi_{n,B}$  é chamado de *filtro da mediana em relação à vizinhança  $B$* .

O operador canônico isotônico parametrizado pela coleção de todos os subconjuntos de  $B$  que têm cardinalidade  $n$  é um filtro de ordem  $n$  em relação a vizinhança  $B$ .

A Figura 9.22 apresenta a aplicação do filtro da mediana para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído, usada nas Figuras 9.17 e 9.18.

Os operadores primitivos  $\Gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\Phi_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  operações

$$\Gamma_{\mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \gamma_{B_i} \quad \text{e} \quad \Phi_{\mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \phi_{B_i},$$

são chamados, respectivamente, de  *$n$ -gerador de aberturas* e  *$n$ -gerador de fechamentos de parâmetro  $\mathfrak{B}$* .

A Figura 9.23 apresenta a aplicação da composição dos filtros  $n$ -gerador de aberturas e  $n$ -gerador de fechamentos para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído, usada nas Figuras 9.17 e 9.18.

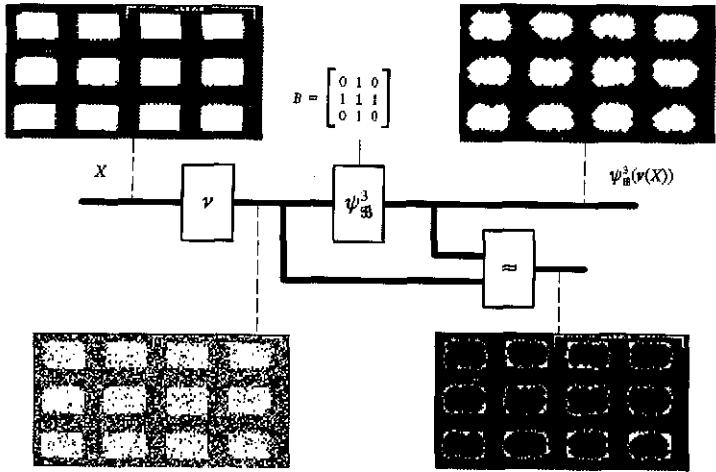


Fig. 9.20 – Restauração por um filtro alternado sequencial fi-gama.

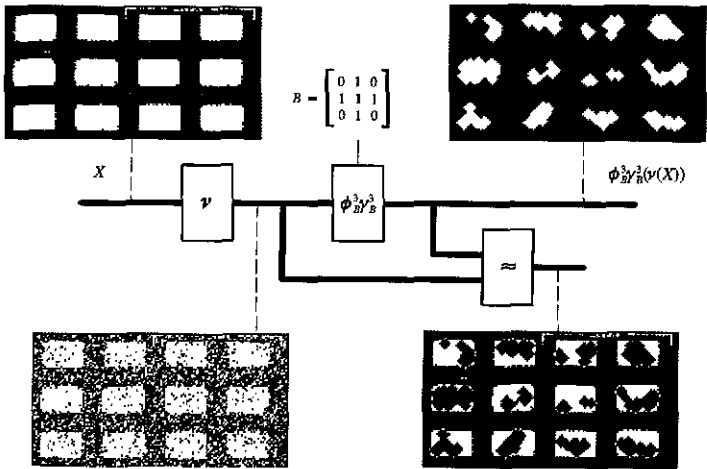


Fig. 9.21 – Restauração por um filtro 3-fi-gama.

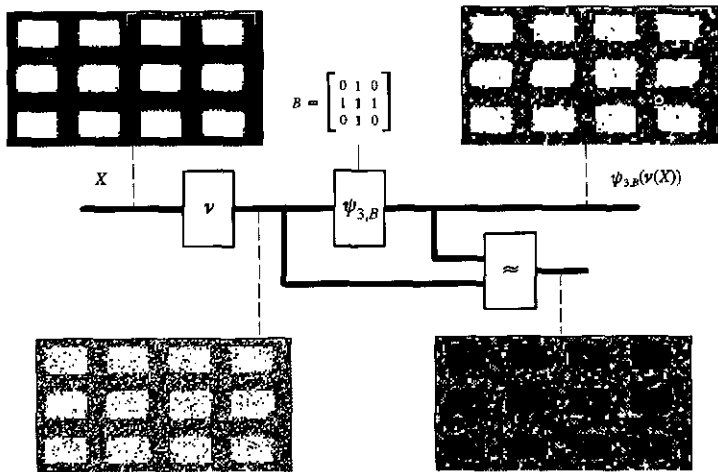


Fig. 9.22 – Restauração por um filtro da mediana.

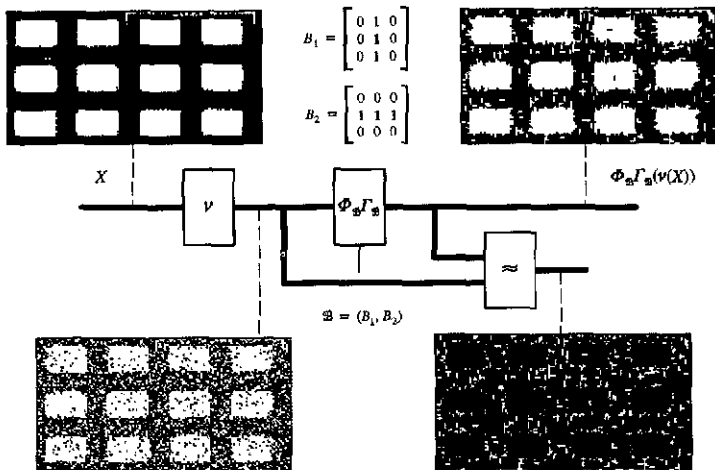


Fig. 9.23 – Restauração por um filtro FI-GAMA.

**Definição 9.8** (*n*-operador canônico e *n*-operador canônico dual) – Os operadores primitivos  $\psi_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}}$  e  $\omega_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  operações

$$\psi_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \lambda_{A_i, B_i} \text{ e } \omega_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \mu_{A_i, B_i},$$

são chamados, respectivamente, de *n*-operador canônico e *n*-operador canônico dual de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$ . □

As Figuras 9.24 e 9.25 apresentam a aplicação do operador *n*-canônico, respectivamente, para a extração dos pontos extremos da imagem de um circuito eletrônico e para a extração dos pontos triplas de um mapa da América do Sul. Em ambos os casos, as seqüências  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$  foram geradas a partir de rotações sucessivas, de 45 graus cada uma, de um dado padrão primitivo  $[A, B]$ .

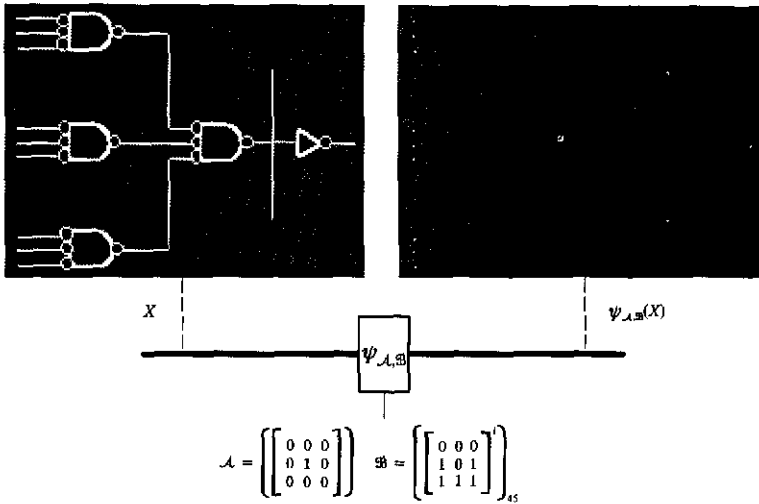


Fig. 9.24 – Identificação de pontos extremos.

**Definição 9.9** (*n*-afinamento e *n*-espessamento) – Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$  duas seqüências finitas de  $n$  subconjuntos em  $E$ , respectivamente, com elementos  $A_i$  e  $B_i$  tais que  $A_i \subset B_i$ . Os operadores  $\sigma_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}}^n$  e  $\tau_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  composições

$$\sigma_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}}^n = \sigma_{A_1, B_1} \dots \sigma_{A_n, B_n} \text{ e } \tau_{\mathcal{A}, \mathfrak{B}}^n = \tau_{A_1, B_1} \dots \tau_{A_n, B_n},$$

são chamados, respectivamente, de *n*-afinamento e *n*-espessamento de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$ . □

É importante observar que, se cada um dos afinamentos ou espessamentos de uma seqüência, respectivamente, de afinamentos ou espessamentos não alterar a homotopia da imagem que recebeu como entrada, então o *n*-afinamento ou o *n*-espessamento produzirá transformações que conservam a homotopia das imagens.

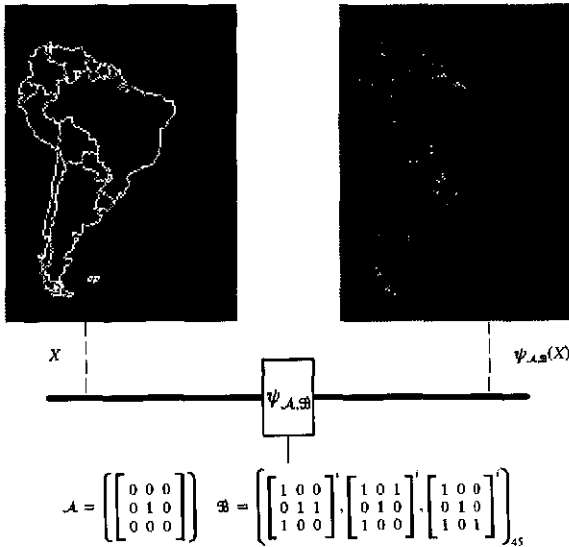


Fig. 9.25 – Identificação de pontos tripos. .

As Figuras 9.26 e 9.27 ilustram a aplicação de operadores de  $n$ -afinamento. A primeira figura apresenta afinamentos homotópicos, que desgastam os objetos paulatinamente a partir das bordas. A segunda figura mostra afinamentos não homotópicos, que têm o efeito de reduzir o comprimento de objetos finos, desgastando-os paulatinamente a partir das pontas. A Figura 9.28 ilustra a aplicação de um operador de  $n$ -espessamento homotópico. Em todos esses exemplos, as sequências de elementos estruturantes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  foram geradas por rotações sequenciais, de 45 cada uma, de um de um dado padrão primitivo  $[A, B]$ .

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas sequências finitas de  $n$  subconjuntos em  $E$ , respectivamente, com elementos  $A_i$  e  $B_i$  tais que  $A_i \subset B_i$ . Os operadores  $\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n$  e  $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  composições

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n = \sigma_{A_1,B_1,Y} \dots \sigma_{A_n,B_n,Y} \quad \text{e} \quad \tau_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n = \tau_{A_1,B_1,Y} \dots \tau_{A_n,B_n,Y}$$

são chamados, respectivamente, de  $n$ -afinamento condicional e  $n$ -espessamento condicional de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , e dado a máscara  $Y$ .

A Figura 9.29 ilustra a aplicação do  $n$ -espessamento condicional. Observe que os espessamentos condicionais ficam restritos aos objetos da máscara. Nesse exemplo, as sequências  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  foram construídas por rotações sucessivas, de 45 graus cada uma, de um dado padrão  $[A, B]$ .

**Exercício 9.2** (Caixa de Ferramentas da MM) – Implemente os programas do nível 2 na forma de workspaces do sistema KHOROS, usando os “glyphs” do módulo “tools”, e dos níveis básico e 1 da “MMach toolbox”. □



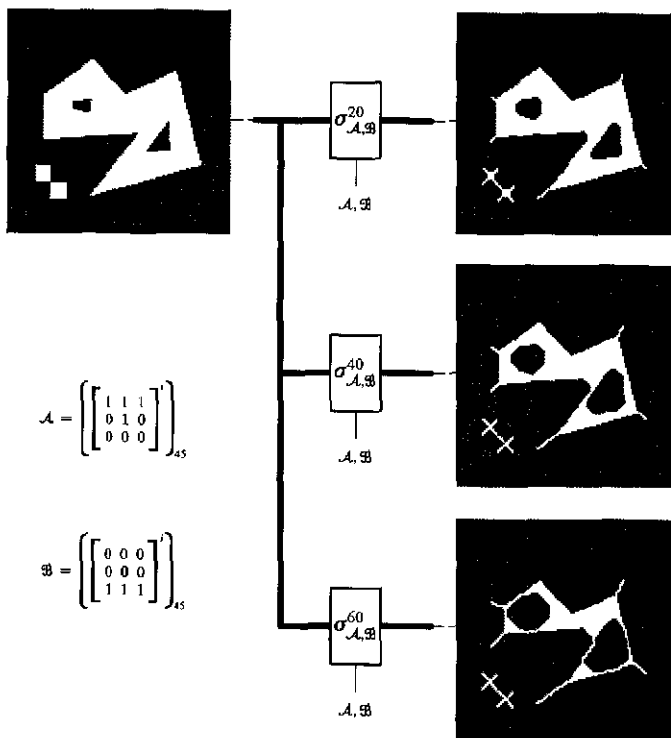


Fig. 9.26 – Sequência de afinamentos homotópicos.

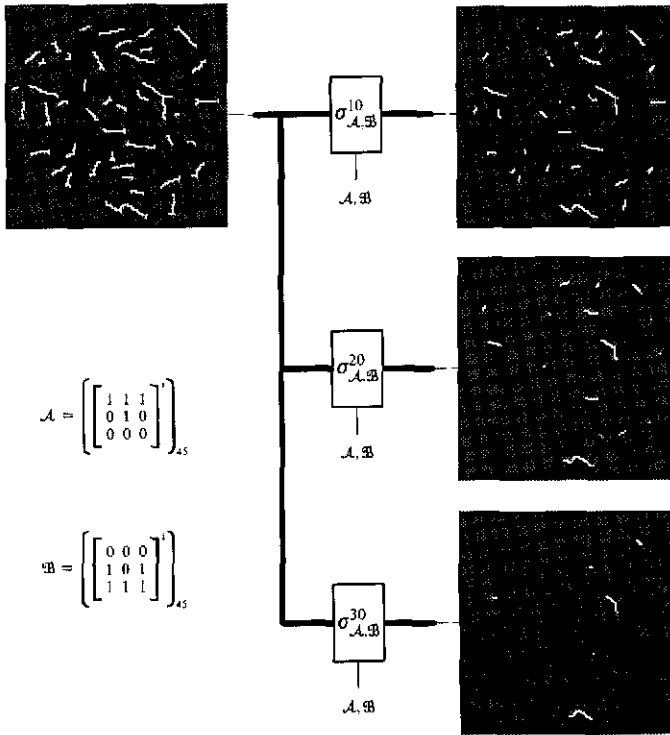


Fig. 9.27 – Sequência de afinamentos não homotópicos.

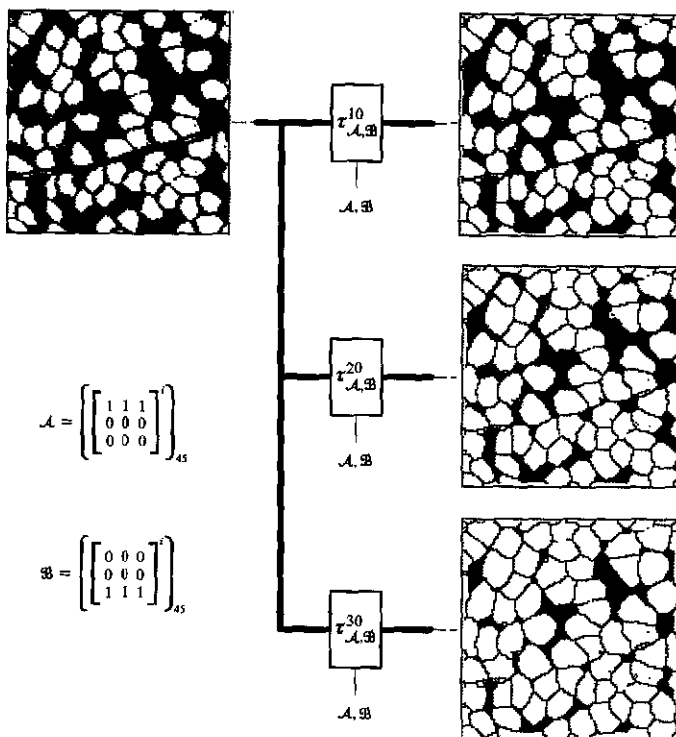


Fig. 9.28 – Sequência de espessamentos homotópicos.

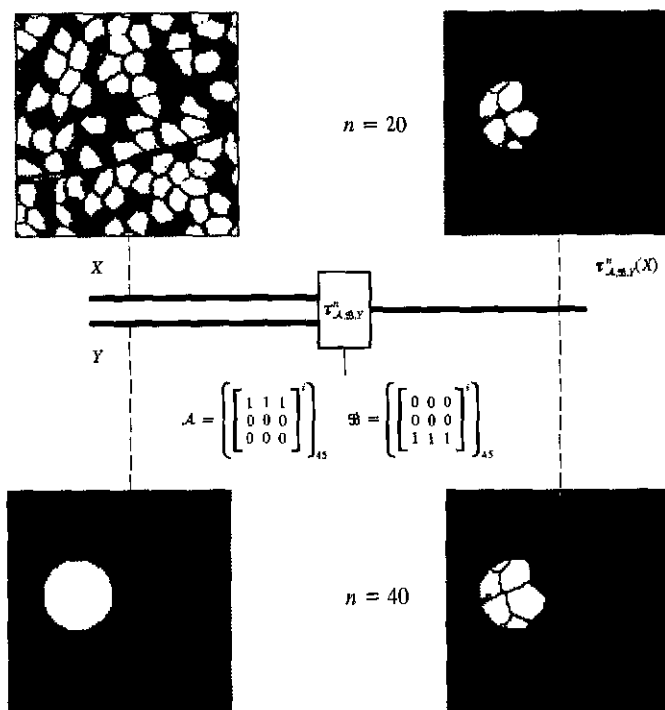


Fig. 9.29 – Sequência de espessamentos condicionais. .

### 9.3 Programas de nível 3

Os programas do nível 3 são construídos usando um número “a priori” indefinido de vezes pelo menos um programa do nível básico.

O operador primitivo  $\beta_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\beta_B = (t \wedge \phi_B \psi_B \phi_B) \vee \gamma_B \phi_B \psi_B,$$

é chamado de *primitiva do filtro do centro*.

**Definição 9.10** (filtro do centro) – O operador primitivo  $\alpha_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte sucessão infinita de composições

$$\alpha_B = \beta_B \beta_B \dots \beta_B \dots$$

é chamada de *filtro do centro*. □

A Figura 9.30 ilustra a aplicação do filtro do centro para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído. Esta imagem é a mesma usada em exemplos anteriores.

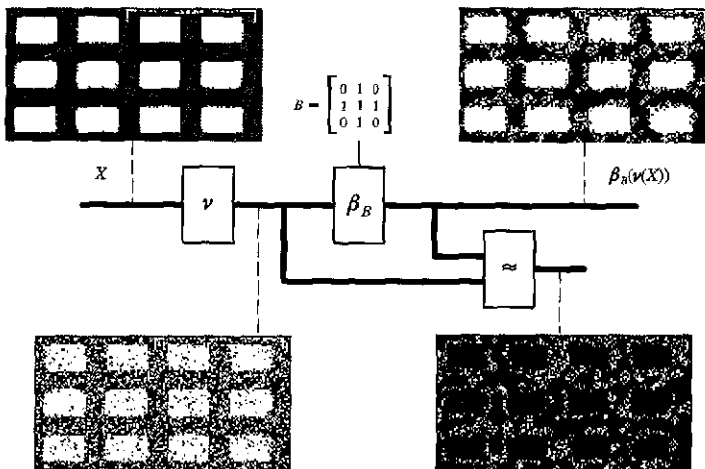


Fig. 9.30 – Restauração por um filtro do centro.

Outros exemplos de programas de nível 3 são as *aberturas e fechamentos por reconstrução por um elemento estruturante dado um marcador* (ver Seção 7.1).

As Figuras 9.31, 9.32, 9.33 e 9.34 ilustram a aplicação da abertura por reconstrução.

O marcador que aparece na Figura 9.31 é o primeiro ponto da imagem a partir da origem. A aplicação sucessiva do operador que extrai o primeiro ponto da imagem e da reconstrução por abertura, conforme apresentado no exemplo, permite extrair objeto a objeto da imagem. Este procedimento, chamado de *rotulação*, é muito importante em análise de imagens, pois permite tratar individualmente cada objeto da imagem.

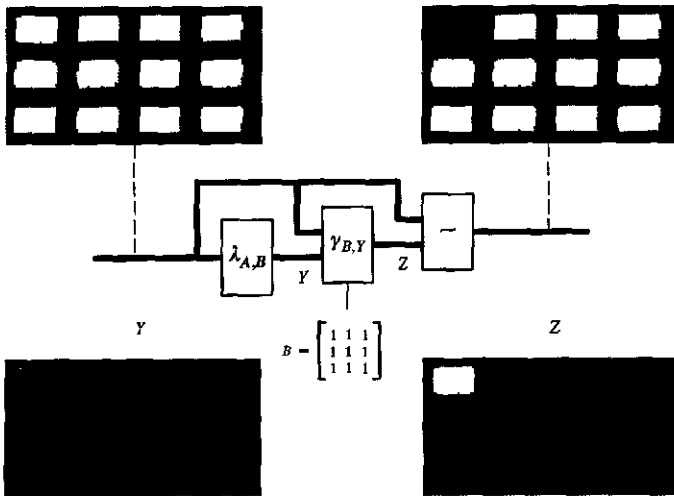


Fig. 9.31 – Rotulação.

O marcador que aparece na Figura 9.32 é a moldura do retângulo  $E$ . A aplicação da abertura por reconstrução com esse marcador particular é muito importante em análise de imagens, pois permite identificar os objetos da imagem que são parcialmente observados e, portanto, são afetados pelos operadores de uma forma diferenciada dos demais objetos.

O marcador que aparece na Figura 9.33 é a abertura da imagem original. A abertura por reconstrução com esse marcador particular tem um efeito de eliminação de objetos pequenos, da mesma forma que a abertura morfológica, e não deformação dos objetos grandes, de forma distinta da abertura morfológica.

A Figura 9.34 ilustra o uso da abertura por reconstrução para eliminar os buracos dos objetos da imagem. É interessante observar, que o operador usado nesse exemplo é dual do operador que extrai os objetos parcialmente observados.

**Definição 9.11** (esqueleto por afinamento e exoesqueleto por espessamento) – Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$  duas seqüências infinitas de elementos estruturantes primitivos, respectivamente, com elementos  $A_i$  e  $B_i$  tais que  $A_i \subset B_i$ . Os operadores  $\Sigma_{\mathcal{A},\mathfrak{B}}$  e  $T_{\mathcal{A},\mathfrak{B}}$ , sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pela seguinte sucessão infinita de composições

$$\Sigma_{\mathcal{A},\mathfrak{B}} = \sigma_{A_1,B_1} \cdots \sigma_{A_i,B_i} \cdots \circ T_{\mathcal{A},\mathfrak{B}} = \tau_{A_1,B_1} \cdots \tau_{A_i,B_i} \cdots$$

são chamados, respectivamente, de *esqueleto por afinamento* e *exoesqueleto por espessamento* de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$ . □

As seqüências  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$  que parametrizam o esqueleto por afinamento e o exoesqueleto por espessamento, usualmente, são equivalentes às rotações sucessivas de um padrão.

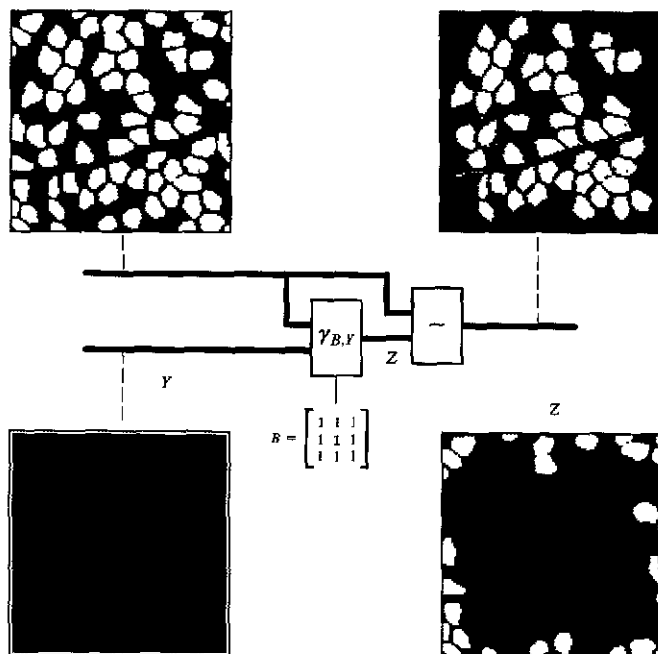


Fig. 9.32 – Eliminação dos objetos que tocam as bordas.

A Figura 9.35 ilustra a aplicação do esqueleto por afinamento. Observamos que os esqueletos em (a), (c) e (d) são homotópicos, enquanto os esqueletos em (b) e (e) não são homotópicos. Notamos também que o incremento de rotação (45–90) tem influência no fato do esqueleto ser homotópico ou não. Por exemplo, em (b), que é um esqueleto não homotópico, e em (c), que é um esqueleto homotópico, temos como parâmetro o mesmo padrão, porém um incremento de rotação diferente.

A Figura 9.36 apresenta a aplicação de um esqueleto homotópico a imagem de um conjunto de letras.

A Figura 9.37 ilustra a aplicação do exoesqueleto por espessamento. Observamos que nenhum desses exoesqueletos é homotópico, devido ao espessamento da moldura da imagem, ocorrido porque a erosão e a anti-dilatação usadas terem sido implementadas como transformações condicionalmente invariantes por translação.

Em alguns casos, a composição de dois esqueletos pode levar a esqueletos com propriedades mais interessantes. A Figura 9.38 apresenta a aplicação da composição de dois esqueletos por afinamento à imagem das letras.

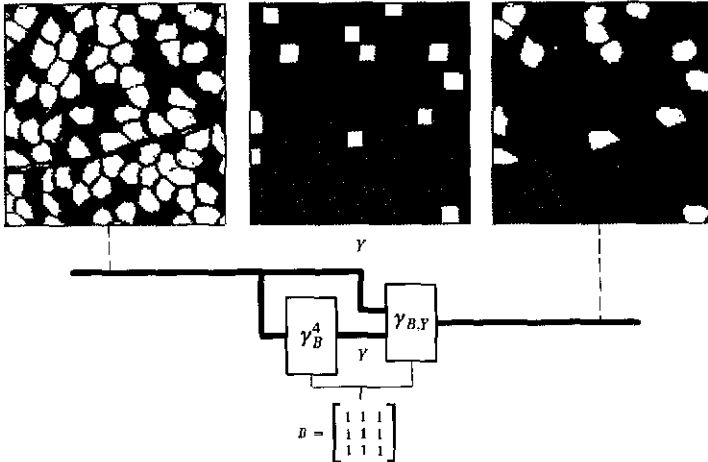


Fig. 9.33 – Filtragem de objetos pequenos.

Uma outra composição de esqueletos interessante é um esqueleto homotópico, seguido de um esqueleto que “come” as pontas soltas de imagens finas. Esta composição de esqueletos aparece, por exemplo, no operador conhecido como *SKIZ*, que cria uma partição do domínio de definição das imagens a partir de uma imagem de referência. Para cada componente conexa da imagem de referência, existirá um gomo correspondente da partição, que será chamado *zona de influência da componente conexa*.

A Figura 9.39 ilustra a aplicação do *SKIZ* à imagem das células. A união com a moldura da imagem garante que as pontas do esqueleto que tocam a moldura não sejam eliminadas.

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  elementos estruturantes primitivos. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  seqüências infinitas de elementos estruturantes primitivos, respectivamente, com elementos  $A_i, B_i, C_i$  e  $D_i$ , tais que  $A_i = A^i, B_i = B^i, C_i = C^i, D_i = D^i, A \subset B$  e  $C \subset D$ . O operador  $\Sigma_{A,B,C,D}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte sucessão infinita de composições

$$\Sigma_{A,B,C,D} = (\sigma_{A_1,B_1} \wedge \sigma_{A_2,B_2} \wedge \sigma_{C_1,D_1}) \dots (\sigma_{A_i,B_i} \wedge \sigma_{A_{i+1},B_{i+1}} \wedge \sigma_{C_i,D_i}) \dots$$

é chamado *esqueleto por afinamento filtrado de parâmetros  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$* .

A Figura 9.40 apresenta uma aplicação do esqueleto por afinamento filtrado à imagem das letras. Comparando este resultado com os das Figuras 9.36 e 9.38, observamos que este esqueleto homotópico é menos ruidoso do que os outros esqueletos homotópicos apresentados. De fato, Jang e Chin [JanChi90] analisaram teoricamente o esqueleto por afinamento filtrado, com os parâmetros fixados na Figura 9.40, e provaram que ele é sempre formado de curvas simples.



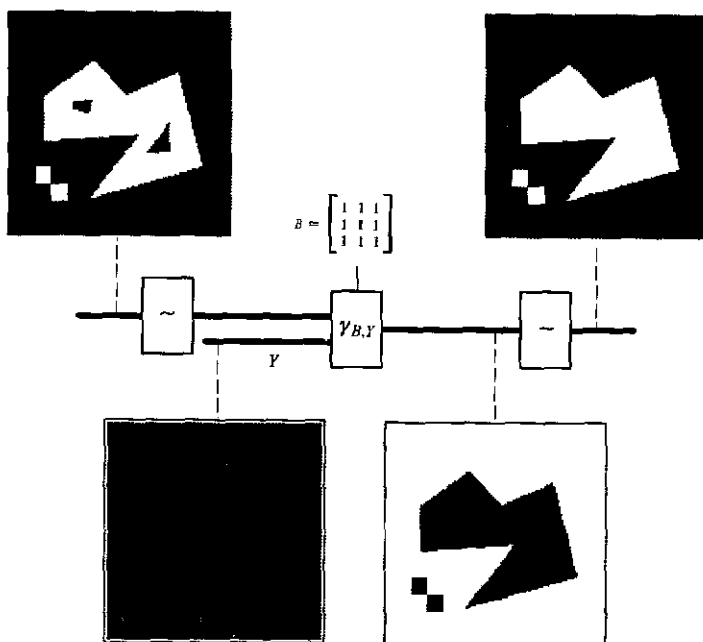


Fig. 9.34 – Fechamento de buracos.

**Definição 9.12** (esqueleto condicional por afinamento e exoesqueleto condicional por espessamento) – Seja  $Y$  um elemento de  $\mathcal{P}(E)$ , os operadores  $\Sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}$  e  $T_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pela seguinte susseção infinita de composições

$$\Sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y} = \sigma_{A_1, B_1, Y} \dots \sigma_{A_n, B_n, Y} \dots \text{ e } T_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y} = \tau_{A_1, B_1, Y} \dots \tau_{A_n, B_n, Y} \dots$$

são chamados, respectivamente, de *esqueleto condicional (ou geodésico) por afinamento* e *exoesqueleto condicional (ou geodésico) por espessamento de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , dado  $Y$* .  $\square$

Uma aplicação usual do exoesqueleto condicional por espessamento homotópico é para a segmentação de objetos superpostos, um problema típico em análise de imagens citológicas ou industriais. A Figura 9.41 ilustra o efeito de separação de dois discos.

A aplicação simples do operador acima pode distorcer consideravelmente a curva de separação dos objetos. Um artifício que pode-se empregar para suavizar este efeito é aplicar este exoesqueleto sucessivamente a  $i$ -erosão da imagem original, com  $i$  tomando valores decrescentes de  $n$  até 1. A Figura 9.42 apresenta algumas iterações do espessamento condicional suave. É interessante comparar os resultados das Figuras 9.41 e 9.42.

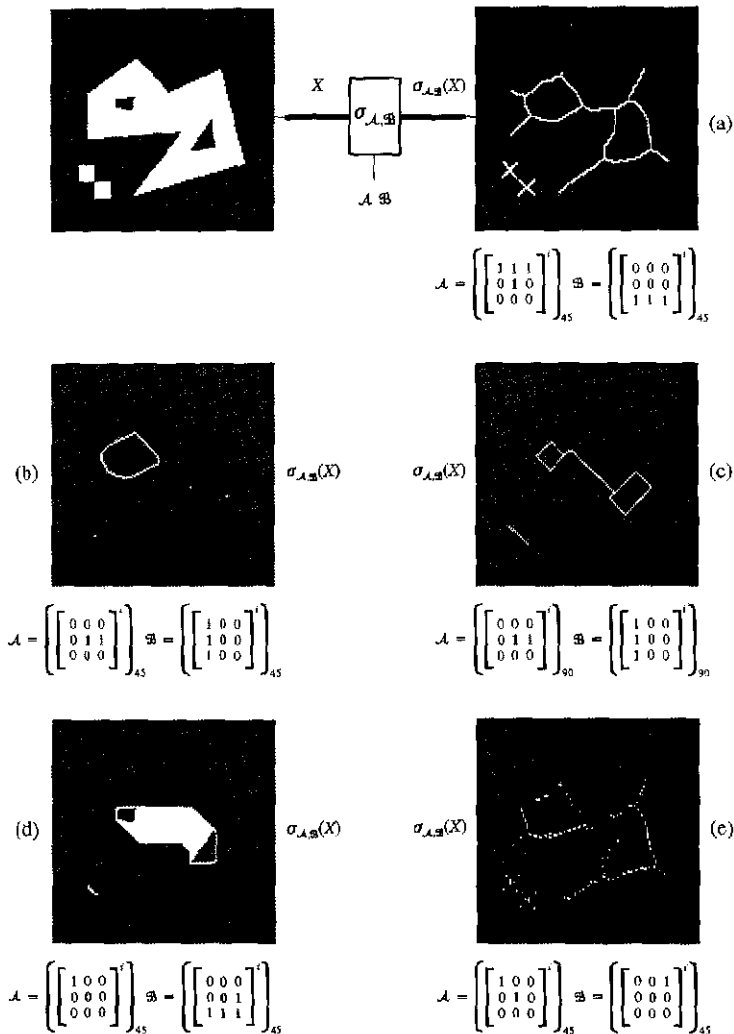
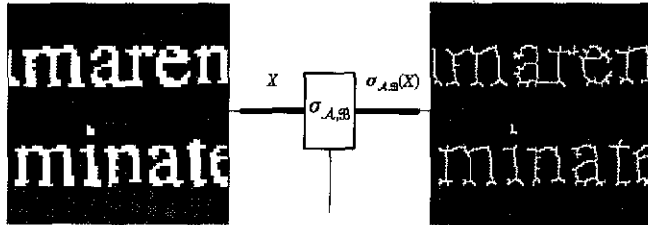


Fig. 9.35 – Esqueletos por afinamento.



$$A = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{45}, \quad B = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right]_{45}$$

Fig. 9.36 – Esqueleto por afinamento.

**Definição 9.13** (erosão última) – O operador primitivo  $\varrho_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\varrho_B = \bigvee_{i=0,1,\dots} \varepsilon_B^i \sim \gamma_{B,\varepsilon_B^{i+1}} \varepsilon_B^i$$

é chamado de *erosão última de parâmetro B*. □

A Figura 9.43 apresenta a construção da erosão última.

**Definição 9.14** (bissetor condicional de orden  $n$ ) – O operador primitivo  $\beta_B^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\beta_B^n = \bigvee_{i=0,1,\dots} \varepsilon_B^i \sim \delta_{B,\varepsilon_B^n}^n \varepsilon_B^{i+1}$$

é chamado *bissetor condicional de orden  $n$  e de parâmetro B*. □

A Figura 9.44 apresenta a construção do bissetor condicional.

**Definição 9.15** (esqueleto morfológico) – O operador primitivo  $\sigma_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\sigma_B = \bigvee_{i=0,1,\dots} \varepsilon_B^i \sim \gamma_B \varepsilon_B^i$$

é chamado *esqueleto morfológico de parâmetro B*. □

A Figura 9.45 apresenta a construção do esqueleto morfológico.

Os operadores de erosão última, bissetor condicional e esqueleto morfológico, em muitos casos, são empregados para produzir marcadores que identificam objetos superpostos. De fato, o bissetor condicional é um operador intermediário entre a erosão última e o esqueleto morfológico, dependendo da escolha do parâmetro  $n$  ele se aproxima mais de um ou de outro. Para  $n = 0$ , o bissetor condicional será o próprio esqueleto morfológico. Para valores de  $n$  acima de um certo valor mínimo, o bissetor condicional será a própria erosão última.

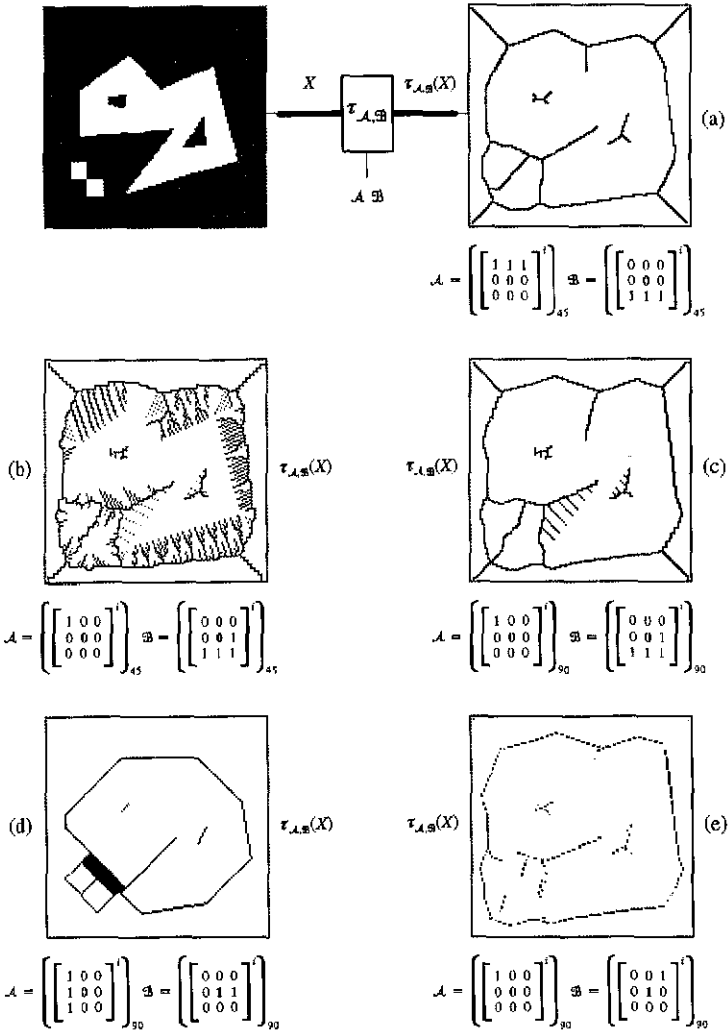


Fig. 9.37 – Exoesqueletos por espessamento.

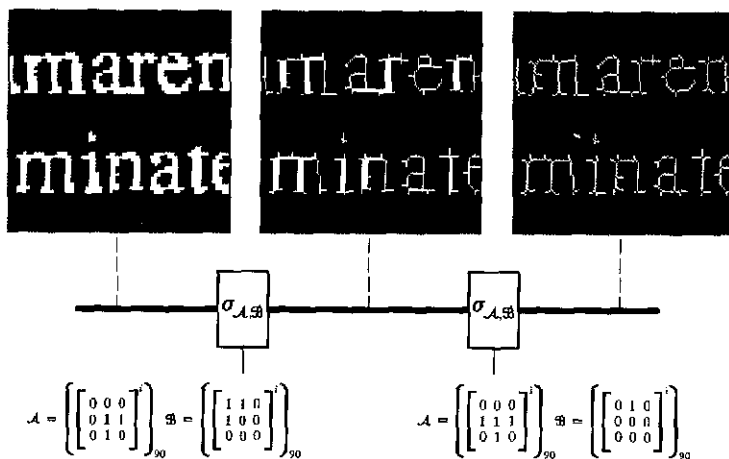


Fig. 9.38 – Composição de esqueletos por afinamento.

**Exercício 9.3** (Caixa de Ferramentas da MM) – Implemente os programas do nível 3 na forma de workspaces do sistema KHOROS, usando os “glyphs” do módulo “tools” e dos níveis básico, 1 e 2 da “MMach toolbox”. □

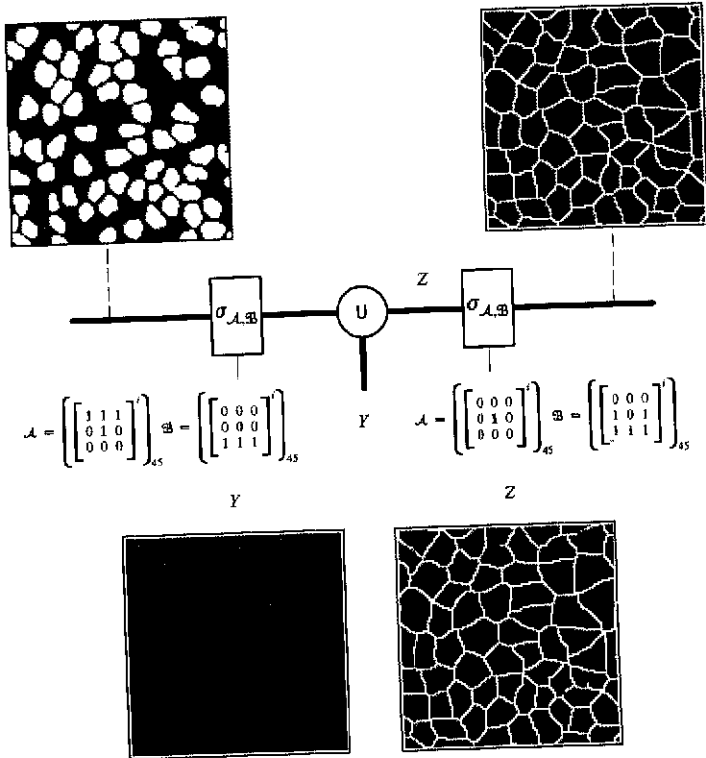


Fig. 9.39 – SKIZ.

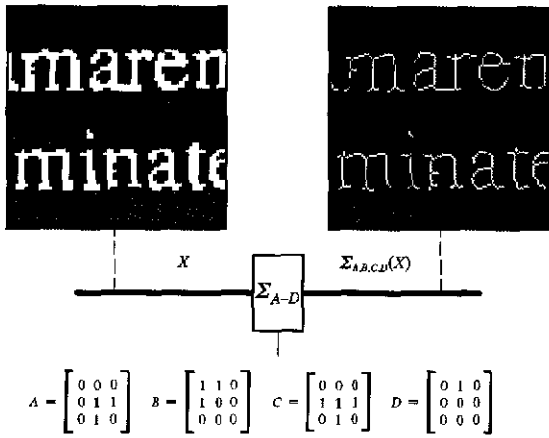


Fig. 9.40 – Esqueleto por afinamento filtrado.

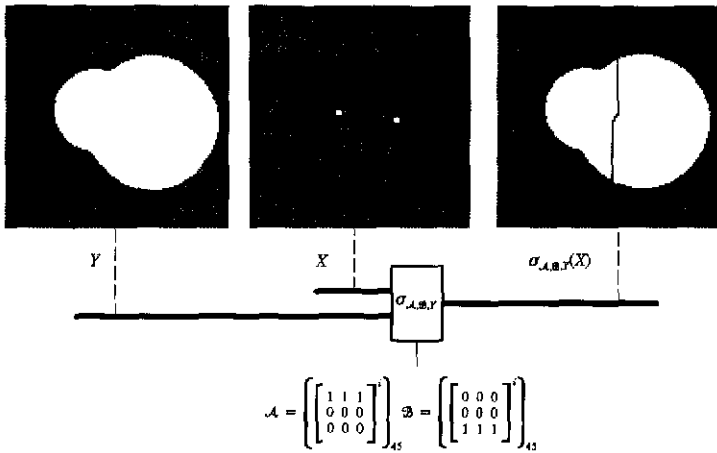


Fig. 9.41 – Espessamentos condicionais.

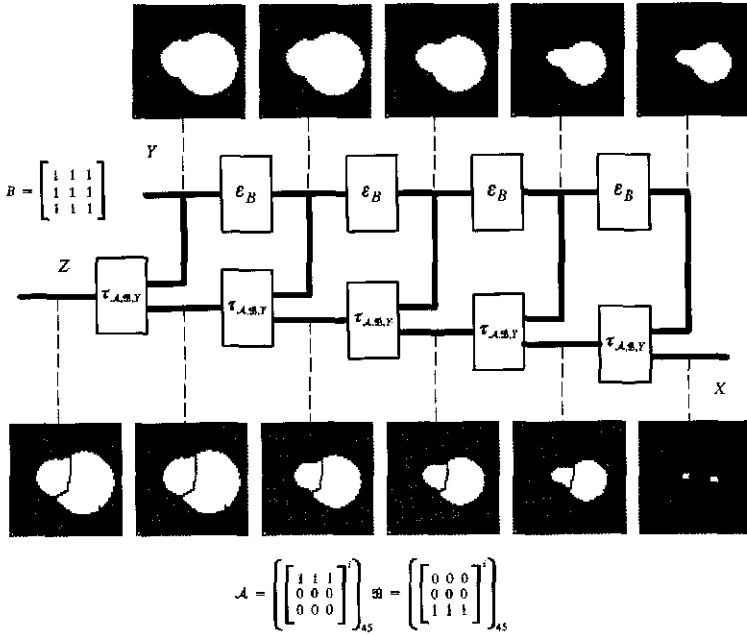


Fig. 9.42 – Espessamento condicional suave.



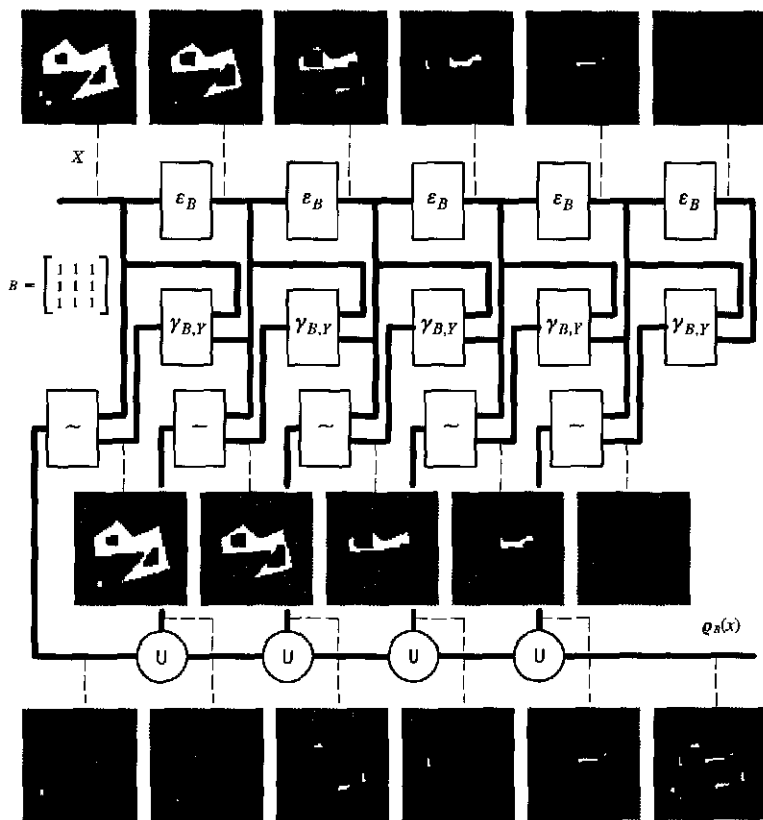


Fig. 9.43 – Erosão última.

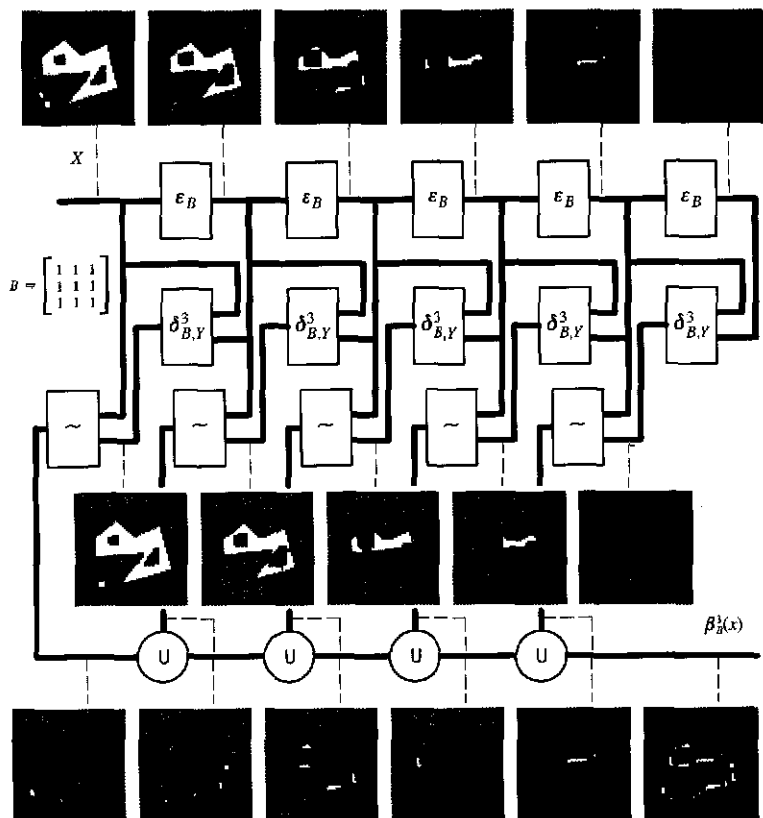


Fig. 9.44 – Bissetor condicional.

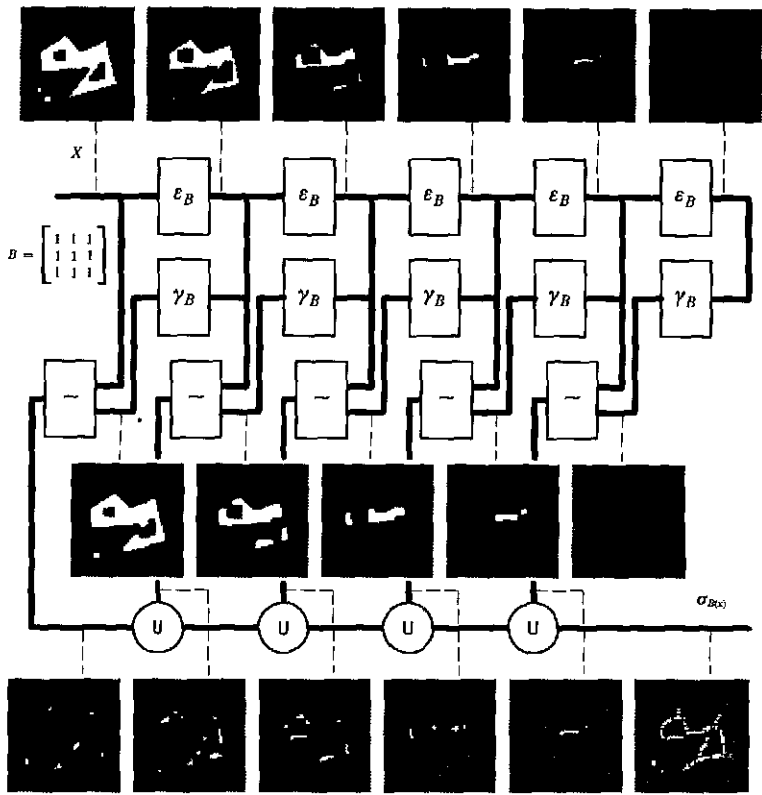


Fig. 9.45 – Esqueleto morfológico.



## Apêndice A

### Caixa de ferramentas MMach

Sob um ponto de vista prático, os operadores da Morfologia Matemática são ferramentas para extrair informações de imagens.

Usualmente, um objetivo é quebrado em subobjetivos, que são atingidos por operadores. A composição correta de operadores produz o operador que atinge o objetivo desejado. Por exemplo, a fim de reduzir o efeito de listras em imagens do satélite SPOT, Banon e Barrera localizaram os pixels que representavam as listras e, então, interpolaram novos valores apenas para estes pixels [BanBar89]. Da mesma forma, a fim de segmentar imagens microscópicas de células, Barrera conseguiu um marcador para cada célula e regiões contendo grupos de células, antes de chegar a segmentação da imagem [Barrer91].

Assim, um bom sistema para aplicações da Morfologia Matemática deve ter duas características principais: algoritmos rápidos para os operadores elementares e uma interface adequada para a prototipagem de novos operadores.

O sistema KHOROS é um ambiente portátil para Análise de Imagens que tem se tornado muito popular. Ele roda sobre padrões existentes, tem uma linguagem de programação visual para interface com o usuário, e fornece ferramentas para a implementação e instalação de novos programas. Um conjunto de novos programas pode ser organizado como um subsistema, chamado "toolbox" ou caixa de ferramentas.

Uma vez que o conjunto original de operadores morfológicos disponíveis no KHOROS não era satisfatório, decidimos implementar uma "toolbox" dedicada a Análise de Imagens por Morfologia Matemática [BaBaLo94].

Todos os exemplos de transformação de imagens reais apresentados neste livro foram gerados usando os recursos do KHOROS e da caixa de ferramentas MMach.

#### A.1 Sistema KHOROS

KHOROS [RaArSa90] é um ambiente projetado para a pesquisa em Análise de Imagens. Ele foi criado no "Department of Electrical and Computer Engineering" da "University of New Mexico", Albuquerque,

USA, e tornou-se muito popular. De acordo com uma estatística recente do grupo do KHOROS, ele tem cerca de 10.000 usuários ao redor do mundo, que recebem suporte e trocam informação por uma lista eletrônica muito ativa.

Uma vez que a Análise de Imagens abrange um amplo espectro de aplicações, ele foi projetado a partir de uma ampla perspectiva. Por exemplo, ele inclui mecanismos para computação distribuída, visualização interativa de muitos tipos de dados, e interfaces de usuários adequadas.

Uma das características mais poderosas do KHOROS é a CANTATA, a sua interface de alto nível de abstração. CANTATA é uma linguagem gráfica baseada em fluxo de dados que provê um ambiente de programação visual para o sistema. Fluxo de dados é uma abordagem na qual o programa é descrito como um grafo orientado, onde cada nó representa uma operação (ou função) e cada arco orientado representa um caminho sobre o qual os dados fluem. Um programa da CANTATA é também chamado um "workspace". A Figura 8.15 é um exemplo de um workspace.

KHOROS foi projetado para ser portátil e extensível. Ele roda sobre padrões existentes (X Windows e UNIX), incorpora ferramentas para desenvolvimento de software e manutenção (uma especificação de interface de usuário de alto nível e um conjunto de geradores de código), um formato flexível de representação de dados, ferramentas para exportar e importar formatos de dados padrões, e uma biblioteca de algoritmos.

Existem dois tipos de programas no sistema KHOROS: as *vrotinas* e as *xvrotinas*. A principal característica das *xvrotinas* é que elas tem as suas próprias interfaces gráficas, enquanto as *vrotinas* não têm.

Os programas dos usuários (*vrotinas* e *xvrotinas*) podem ser organizados como subsistemas independentes, chamados *toolboxes*, que podem ser facilmente integrados ao sistema. Usualmente, uma "toolbox" de um usuário é depositada em uma área pública de um computador da "University of New Mexico" e pode ser acessada pela comunidade de usuários do KHOROS, via ftp anônimo.

## A.2 Arquitetura da caixa de ferramentas MMach

Implementamos a Caixa de Ferramentas de Morfologia Matemática para imagens binárias e em níveis de cinza como uma "toolbox" do sistema KHOROS, onde cada família de operadores morfológicos é apresentada como um submenu do menu principal da "toolbox".

Seguindo a teoria da Morfologia Matemática, todos os operadores são construídos pela composição dos operadores elementares e operações sobre reticulados completos.

As dilatações e erosões são ainda decompostas, respectivamente, em termos de dilatações e erosões primitivas.

Como os operadores elementares para imagens binárias têm propriedades adicionais do que os correspondentes operadores para imagens em níveis de cinza, algoritmos diferentes foram escolhidos para cada caso.

A fim de simplificar o seu uso, o sistema foi projetado para ser orientado pelo tipo do dado (imagem em níveis de cinza ou binária), isto é, ele escolhe automaticamente o algoritmo mais eficiente para o dado de entrada corrente.

Todos os programas principais implementados são *vrotinas* do KHOROS. Operadores complexos podem ser construídos como programas na linguagem CANTATA ou C., que usam, respectivamente, *vrotinas* ou *subrotinas* das primitivas disponíveis.

### A.3 Conteúdo da caixa de ferramentas MMach

Esta "toolbox" é composta por cinco grupos de programas: operadores e operações do nível básico; operadores do primeiro, segundo e terceiro níveis; outras ferramentas (Tabela A.1).

Tabela A.1 – CONTEÚDO DA CAIXA DE FERRAMENTAS MMACH.

Nome inglês	Routine	Definição
Basic image operations and transformations		
infimum	vinf	2.3
supremum	vsup	2.2
inversion	viw	2.4
subtraction	vsubm	2.5
threshold	vthreshd	-
toggle	vtoggle	-
dilation	vdil	4.11
erosion	vero	4.11
First level image transformations		
anti-dilation	vadil	7.16
anti-erosion	vaero	7.16
gradient	vgradm	9.1
cond. dilation	vcdil	7.9
cond. erosion	vcero	7.9
opening	vopen	6.7
closing	vclose	6.7
sup-generating	vsupgen	7.17
inf-generating	vinfgcn	7.17
thinning	vthin	9.2
thickening	vthick	9.2
cond. thinning	vethin	9.3
cond. thickening	vethick	9.3
Second level image transformations		
n-dilation	vndil	9.4
n-erosion	vnero	9.4

Nome inglês	Routine	Definição
n-cond. dilation	vncdil	7.10
n-cond. erosion	vncero	7.10
n-opening	vnopen	9.5
n-closing	vnclose	9.5
n-open/close	vncofilt	9.6
n-close/open	vncofilt	9.6
n-op./cl./op.	vncocfilt	9.7
n-cl./op./cl.	vncocfilt	9.7
n-thinning	vnthin	9.9
n-thickening	vnthick	9.9
n-canonical	vncanon	9.8
n-can. dual	vncanond	9.8
center primitive	vcenterp	-
Third level image transformations		
open. by rec.	vopenrec	7.11
clos. by rec.	vclosrec	7.11
center filter	vcenter	9.10
skel. by thin	vskelthin	9.11
exoskel. by thick.	vskelthick	9.11
cond. skel. by thin.	vskelthin	9.12
cond. exoskel. by thick.	vskelthick	9.12
morph. skel.	vskel	9.15
fast erosion	vlastero	9.13
cond. bisector	vbisset	9.14

As outras ferramentas são: uma interface para a definição de elementos estruturantes, rotação de elementos estruturantes, comparação entre duas imagens, desenho das fronteiras das imagens (linhas e colunas extremas).

Os subconjuntos que são parâmetros dos operadores morfológicos implementados são elementos estruturantes primitivos.

Para cada programa da "toolbox", existe um "help" ativo associado, que descreve o operador e sugere um conjunto de parâmetros bem conhecidos que levam a extração de informações interessantes de imagens.

## A.4 Avaliação de desempenho dos algoritmos

Os operadores primitivos de dilatação e erosão foram implementados para o caso de imagens em níveis de cinza e para o caso de imagens binárias, respectivamente, por algoritmos que examinam a vizinhança local e por algoritmos baseados em translações de imagens compactadas em palavras de 32 bits.

A Tabela A.2 mostra a avaliação de algumas dilatações e erosões, no caso de imagens em níveis de cinza e binárias.

O tempo gasto por cada operador, dado em milissegundos (ms), foi calculado a partir do tempo gasto por uma sequência de mil chamadas do operador. A máquina usada foi uma SUN SPARCstation-2 e os dados de entrada foram 256x256x1 (imagem binária) e 256x256x8 (imagem em níveis de cinza).

O ganho por executar uma dilatação ou erosão por um algoritmo dedicado é aproximadamente entre 10 e 12 vezes.

O desempenho destes algoritmos são equivalentes a aqueles dos algoritmos rodando em hardwares especializadas construídos com a tecnologia de 1986, isto é, 6ms e 70ms, respectivamente, para imagens binárias e em níveis de cinza [Bilode86].

Tabela A.2 – DESEMPENHO DAS DILATAÇÕES E EROSÕES.

Elemento estruturante	Image binária (ms)	Imagem em níveis de cinza (ms)	Ganho
<pre> 111 111 111 </pre>	6.0	69.7	11.6
<pre> 010 111 010 </pre>	6.0	62.5	10.4
<pre> 000 111 000 </pre>	4.5	44.7	9.9



## Bibliografia

- [BanBar89] Banon, G. J. F. e J. Barrera: "Morphological filtering for stripping correction of SPOT images". *Photogrammetria (PRS)* (43), pp. 195–205, 1989.
- [BanBar90] Banon, G. J. F. e J. Barrera: "Set mapping decompositions by Mathematical Morphology". Capítulo que será incluído em um livro intitulado *Mathematical Morphology: theory and Hardware*, a ser editado por R. M. Haralick.
- [BanBar91] Banon, G. J. F. e J. Barrera: "Minimal representations for translation-invariant set mappings by Mathematical Morphology". *SIAM J. Appl. Math.* (51), 6, pp. 1782–1798, 1991.
- [BanBar93] Banon, G. J. F. e J. Barrera: "Decomposition of mappings between complete lattices by Mathematical Morphology". *Signal Processing* (30), pp. 299–327, 1993.
- [BanBar94] Banon, G. J. F. e J. Barrera: "Set operation decomposition and conditionally translation invariant elementary operators". *Proceedings of the ISMM'94*, Fontainebleau 1994, no prelo.
- [Barrer87] Barrera, J.: *Uma abordagem unificada para os problemas de Processamento Digital de Imagens: a Morfologia matemática*. Dissertação de mestrado, INPE, São José dos Campos, 1987.
- [Barrer91] Barrera, J.: "Estudo da proliferação celular por análise morfológica de imagens". *IV Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, pp. 201–212, São Paulo, julho, 1991.
- [BarBan92] Barrera, J. e J. G. F. Banon: "Expressiveness of the morphological language". *Image Algebra and Morphological Image Processing III*, SPIE, San Diego, California, (1769), pp. 264–275, 1992.
- [BaBaLo94] Barrera, J., G. J. F. Banon e R. A. Lotufo: "A mathematical morphology toolbox for the KHOROS system". To be published in: *Image Algebra and Morphological Image Processing V*, SPIE, San Diego, California, 1994.
- [Beuche87] Beucher, S.: *MICROMORPH – Manuel de Référence*. École des Mines de Paris, 1987.
- [Bilode86] Bilodeau, M.: *Guide succinct de l'utilisateur du MPC*. Rapport interne, CMM, N-47/87/MM, Fontainebleau, 1986.
- [Birkho67] Birkhoff, G.: *Lattice theory*. 3ª ed., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

- [BirLan65] Birkhoff, G. e S. Mac Lane: *A brief survey of modern algebra*. The Macmillan Company, New York, 1965.
- [CaRaCo63] Cagnac, G., E. Ramis, e J. Commeau: *Nouveau cours de Mathématiques spéciales. Volume 1: Algèbre*. Masson, Paris, 1963.
- [CaRaCo65] Cagnac, G., E. Ramis, e J. Commeau: *Nouveau cours de Mathématiques spéciales. Volume 3: Géométrie*. Masson, Paris, 1965.
- [Chang87] Chang, S. K.: "Visual language:s: a tutorial and survey". *IEEE Software*, (5), pp. 92-99, 1987.
- [DirRoh72] Director, S. W. e R. A. Rohrer: *Introduction to Systems Theory*. McGraw-Hill Kogakusha Ltd., International Student Edition, Tokyo, p. 441, 1972.
- [Friedl86] Friedlander, F.: *Épaississements et Amincissements Binaires*. CMM, Rapport interne, C123, Fontainebleau, 1986.
- [GenNil88] Genesereth, M. R. e N. Nilsson: *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, 1988.
- [Gratin88] Gratin, C.: *Analyse d'images et morphologie mathématique*. DEA, ENSMP, Fontainebleau, 1988.
- [Gratin93] Gratin, C.: *De la représentation des images au traitement morphologique d'images tridimensionnelles*. Thèse de Doctorat en Morphologie Mathématique, École des Mines de Paris, Fontainebleau, 1993.
- [Hadwig50] Hadwiger, H.: "Minkowskische addition und subtraktion beliebiger punktmengen und die theoreme von Erhard Schmidt". *Math. Zeitschrift*, (53), 3, pp. 210-218, 1950.
- [Hadwig57] Hadwiger, H.: *Vorlesungen uber inhalt, oberfläche und isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [HeiRon90] Heijmans, H. J. A. M. e C. Ronse: "The algebraic basis of mathematical morfology. Part I: dilations and erosions". *Comput. Vision Graph. Image Process* (50), 3, pp. 245-295, 1990.
- [HuDeBo88] Husson, P., J. P. Derutin, P. Bonton e J. Gallice: "Elementary processor with Mathematical Morphology implemented in VLSI and intended for systolic architecture". *Signal Processing IV: Theories and Application*, EURASIP, pp. 1561-1564, 1988.
- [HuJeSa89] Huang, K. S., B. K. Jenkins e A. A. Sawchuck: "Binary image algebra and and optical cellular logic processor design". *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, (45), pp. 295-345, 1989.
- [JanChi90] Jang, B. K. e R. T. Chin: "Analysis of thinning algorithms using Mathematical Morphology". *IEEE Transactions on Pat. Anal. mach. Intel*, (12), 6, 1990.
- [KleSer72] Klein, J. C. e J. Serra: "The texture Analyser". *Journal of Microscopy*, (95), 2, pp. 343-356, 1972.
- [KlePey89] Klein, J. C. e R. Peyhard: "An image processing ASIC based on Mathematical Morphology". *IEEE's A ASIC Seminar and Exhibit*, Rochester, New York, pp. 25-28, 1989.
- [KonRos89] Kong, T. Y. e A. Rosenfeld: "Digital Topology: Introduction and Survey". *Computer Vision, Graphics and Image Processing* (48), pp. 357-393, 1989.

- [Láy84] Láy, B.: *Description des programmes du logiciel morpholog*, CGMM Rapport interne N-904, Fontainebleau, 1984.
- [LiaWon93] Liang, E. e E. K. Wong: "Hierarchical Algorithms for Morphological Image Processing". *Pattern Recognition*, (26), 4, pp. 511-529, 1993
- [Lima 76] Lima, E. L.: *Elementos de topologia geral*. 2ª ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1976.
- [Loeliger81] Loeliger, R. G.: *Threaded interpretative languages: their design and implementation*. Byte Books, Peterborough, 251p., 1981.
- [Marago85] Maragos, P. A.: *A unified theory of translation-invariant systems with applications to morphological analysis and coding of images*. Ph.D dissertation, GA, School of Elec. Eng., Georgia Inst. Tech., 1985.
- [Mather67] Matheron, G.: *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson & Cie., Paris, 166 p., 1967.
- [Mather75] Matheron, G.: *Random sets and integral geometry*, Wiley, New York, 1975.
- [Mather88] Matheron, G.: "Filters and lattices". Em: J. Serra ed., *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, London, Chapter 6, pp. 115-140, 1988.
- [Minkow03] Minkowski, H.: "Volumen und oberfläche". *Math. Annalen* (57), pp. 447-495, 1903.
- [Ornell92] Ornellas, M. C.: *Algoritmos rápidos para o processamento morfológico de imagens binárias*. Dissertação de mestrado do curso de computação do ITA, São José dos Campos, 1992.
- [Pagan81] Pagan, F. G.: *Formal Specification of Programming Languages*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [PipTan89] Pipper, L. J. e J. Y. Tang: "Erosion and dilatation of binary images by arbitrary structuring elements using interval coding". *Pattern Recognition Letters*, (9), 3, pp. 201-209, 1989.
- [RaArSa90] Rasure, J., D. Argiro, T. Sauer e C. Williams: "Visual Language and Software Development Environment for Image Processing". *International Journal of Imaging Systems and Technology*, (2), pp. 183-199, 1990.
- [RonHeij91] Ronse, C. e H. J. A. M. Heijmans: "The algebraic basis of mathematical morphology. Part II: openings and closings". *Comput. Vision Graph. Image Process: Im. Underst.* (54), pp. 74-97, 1991.
- [Rosenf74] Rosenfeld, A.: "Adjacency in digital pictures". *Information and Control* (26), pp. 24-33, 1974.
- [Rosenf79] Rosenfeld, A.: *Picture Languages*. Academic Press, New York, 1979.
- [Schimi86] Schimitt, M.: *Morpholisp*. Relatório interno do CMM, Fontainebleau, 1986.
- [Schimi89] Schimitt, M.: *Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle*. These de doctorat, ENSMP, 1989.
- [Serra82] Serra, J. P. F.: *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 1*. Academic Press, London, 610 p., 1982.

- [Serra88] Serra, J. P. F. (edited by): *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, London, 411 p., 1988.
- [Song84] Song, S. W.: *Algoritmos paralelos e arquitetura VLSI*. IV Escola de Computação, IME-USP, São Paulo, 1984.
- [Sternb82] Sternberg, S. R.: "Cellular computers and biomedical image processing, *Biomedical Images and Computers*". In: Skalansky, J.; Bisconte, J.C. eds. *Lectures notes in medical informatics*, (17), pp. 294-319, Spring Verlag, Berlin, 1982.
- [Szász71] Szász, G.: *Théorie des treillis*. Dunod, Paris, 227p., 1971.
- [VliBen88] Vliet, L. J. e J. H. Ben: "A contour processing method for fast binary neighbourhood operations". *Pattern Recognition Letters*, (7), pp.27-36, 1988.
- [Xu91] Xu, J.: "Decomposition of convex polygonal morphological structuring elements into neighborhood subsets". *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intel.*, (13), 2, pp. 153-162, 1991.
- [Ziviani93] Ziviani, N.: *Projeto de Algoritmos, com implementações em Pascal e C*. Pioneira Informática, São Paulo, 1993.

# Índice

## A

- Aberto
  - morfológico segundo uma morfologia, 131
  - relativo a uma abertura, 108
  - topológico segundo uma topologia, 132
- Abertura, 100
  - condicionalmente invariante por translação, 128
  - convexa, 183
  - curva, 184
  - genérica, 184
  - morfológica, 110
    - i.t., 116
      - por uma função estruturante, 111
  - por reconstrução, 142
  - por reconstrução dado um marcador, 139
  - por reconstrução por um elemento estruturante dado um marcador, 201
  - por um elemento estruturante, 117
  - por uma coleção de subconjuntos, 102
- Absorção, 11
- Adição
  - de dois pontos relativa a um ponto origem, 56
  - módulo um inteiro, 53
  - módulo um par de inteiros, 54de Minkowski, 66
- Afinamento
  - condicional dado um subconjunto, 178
  - parametrizado por dois subconjuntos, 175
- Algebra de Boole, 10
- Algoritmo rápido, 164

- Anti-dilatação, 34
  - de um subconjunto, 34
  - por um elemento estruturante, 74
  - por uma função estruturante, 36
  - por um elemento estruturante, 143
- Anti-erosão, 34
  - de um subconjunto, 34
  - por um elemento estruturante, 74
  - por uma função estruturante, 36
  - por um elemento estruturante, 143
- Anti-extensividade, 32
- Anti-simetria, 21
- Antitonia, 25, 32
- Associatividade, 11, 52
- Automorfismo, 61, 63

## B

- Base de uma subcoleção sup-fechada, 110
- Bissetor condicional de ordem  $n$ , 207
- Borda
  - externa, 174
  - interna, 174
- Borda-4
  - de um subconjunto, 145
  - de uma componente 8-conexa relativamente a uma componente 4-conexa, 145
- Borda-8
  - de um subconjunto, 145
  - de uma componente 4-conexa relativamente a uma componente 8-conexa, 145
- Buraco, 146
  - 4-conexo num subconjunto, 143
  - 8-conexo num subconjunto, 143

## C

- Complementação
  - de um operador, 37
  - de uma função, 12
- Complementaridade, 11
- Complemento
  - de um função binária, 12
  - de um operador, 37
- Componente
  - 4-conexa de um subconjunto, 139
  - dado um ponto, 138
  - 8-conexa de um subconjunto dado um ponto, 138
  - conexa dado um ponto num espaço morfológico, 137
- Composição de um operador por um outro, 45
- Composto de um operador por um outro, 45
- Comutatividade, 11, 52
- Conexão de Galois, 81, 82, 83, 89
  - invariante em translação, 116
- Conexo
  - espaço morfológico -, 132
  - subconjunto -, 133
- Conjunto parcialmente ordenado, 21
- Curva
  - aberta simples, 145
  - fechada simples, 145

## D

- Diferença
  - de duas funções binárias, 15
  - de Minkovski entre dois subconjuntos, 69
  - entre dois inteiros, 53
  - entre pares do retângulo, 54
  - entre pontos relativa a um ponto origem, 57
  - simétrica entre dois subconjuntos, 180
- Dilatação, 34
  - condicional por um elemento estruturante dado um subconjunto, 139

- condicionalmente invariante por translação, 80
- convexa, 181
- curva, 183
- de um subconjunto, 34
  - por um elemento estruturante, 73
  - por uma função estruturante, 36
- genérica, 182
- geodésica por um elemento estruturante dado um subconjunto, 139

Distributividade, 11

Domínio de invariância de um operador, 101

Dual (por complementação) de um operador, 90

## E

- Elemento
  - de imagem, 9
  - estruturante de uma dilatação i.t., 73
  - estruturante primitivo, 154
- Elemento neutro, 52
- Elementos
  - neutros, 11
  - nulos, 11
- Endereço de um elemento, 163
- Erosão, 34
  - condicional por um elemento estruturante dado um subconjunto, 139
  - condicionalmente invariante por translação, 80
  - convexa, 181
  - curva, 183
  - de um subconjunto, 34
    - por um elemento estruturante, 74
    - por uma função estruturante, 36, 88
  - genérica, 182
  - geodésica por um elemento estruturante dado um subconjunto, 139
  - última, 207
- Espaço
  - de vizinhança 8, 134
  - morfológico, 131
  - topológico, 132

- Espaço afim
  - canônico, 55
  - ligado a um grupo Abeliano, 54
- Espessamento
  - condicional dado um subconjunto, 178
  - parametrizado por dois subconjuntos, 175
- Esqueleto
  - condicional por afinamento, 205
  - morfológico, 207
  - por afinamento, 202
  - por afinamento filtrado., 204
- Exoesqueleto
  - condicional por espessamento, 205
  - por espessamento, 202
- Extensividade, 32
- Extrator
  - de bordas, 174
  - de bordas parametrizado por dois subconjuntos, 145

## F

- Família
  - de elementos de um conjunto, 16
  - de Moore, 104, 132
- Fechado
  - morfológico segundo uma morfologia, 132
  - relativo a um fechamento, 108
  - topológico segundo uma topologia, 132
- Fechamento, 100
  - condicionalmente invariante por translação, 128
  - convexo, 183
  - curvo, 184
  - genérico, 184
  - morfológico, 110
    - i.t., 116
    - por uma função estruturante, 111
  - por reconstrução dado um marcador, 139
  - por reconstrução por um elemento estruturante dado um marcador, 201
  - por um elemento estruturante, 117
  - por uma coleção de subconjuntos, 102

Fila, 165

Filtro

- alternado sequencial, 191
- da mediana em relação a uma vizinhança, 192
- de ordem  $n$  em relação à vizinhança, 192
- do centro, 201
- morfológico, 99
- $n$ -fi-gama, 190
- $n$ -fi-gama-fi, 190
- $n$ -gama-fi, 190
- $n$ -gama-fi-gama, 190

Função

- condicionalmente invariante por translação, 80
- estruturante de uma dilatação, 36
- estruturante de uma erosão, 87
- indicadora de um subconjunto, 8
- invariante em translação, 71

Função binária, 7

- igual a outra, 21
- menor que outra, 21

Funções mutuamente transpostas, 93

## G

Grade, 9

Gradiente morfológico, 174

Gráfico de uma função, 8

Gramática, 151

Grupo, 52

Grupo Abeliano, 52

## H

Homotopia, 147

## I

Idempotência, 11

- de tipo 1, 32
- de tipo 2, 32

Identidade, 11

**Imagem**

- binária, 9
- preto e branco, 9

**Indempotência, 32****Ínfimo de um conjunto, 28****Interseção**

- de dois operadores, 37
- de duas funções binárias, 12
- de uma família
- de funções, 19
- de operadores, 38
- de uma família de subconjuntos, 17
- de uma função binária, 18
- entre dois operadores, 37
- entre duas funções binárias, 12
- entre os elementos de uma família
- de 0 e 1, 18
- de funções binárias, 19
- de operadores, 38
- de subconjuntos, 17

**Intervalo fechado, 144****Invariança em translação, 59****Invariante de um operador, 101****Involução, 25, 33****Isotonia, 32**

- dupla, 30

**L****Lei**

- do elemento neutro, 52
- do oposto, 52

**Lei de Morgan, 25****Lei dos nulos, 11****Limitante**

- inferior de um conjunto, 27
- superior de um conjunto, 27

**Linguagem**

- formal, 151
- morfológica, 151

**M****Maior elemento de um conjunto, 27****Máquina morfológica, 157****Máscara de um operador, 156****Menor elemento de um conjunto, 27****Morfologia num conjunto, 131****N****n-abertura por um elemento estruturante, 183****n-afinamento, 195****n-afinamento condicional, 196****n-dilatação**

- condicional por um elemento estruturante dado um subconjunto, 139
- por um elemento estruturante, 180

**n-erosão**

- condicional por um elemento estruturante dado um subconjunto, 139
- por um elemento estruturante, 180

**n-espessamento, 195****n-espessamento condicional, 196****n-fechamento por um elemento estruturante, 183****n-gerador de aberturas, 192****n-operador canônico, 195**

- dual, 195
- isotônico, 191
- isotônico, 191

**n-operador canônico para fechamentos, 192****nm-abertura por dois elementos estruturantes, 183****nm-dilatação por dois elementos estruturantes, 180****nm-erosão por dois elementos estruturantes, 180****nm-fechamento por dois elementos estruturantes, 183**



**O**

- Octógono, 180
- Operador, 31, 32
  - 4-homotópico, 147
  - 8-homotópico, 147
  - anti-extensivo, 32
  - antitônico, 32
  - cartola, 186
  - crescente, 32
  - de ampliação, 134
  - de reconhecimento genérico de forma, 186
    - com folga, 186
  - elemental, 34
    - localmente condicionalmente invariante por translação, 156
  - extensivo, 32
  - Hit-Miss, 144
  - idempotente, 32
  - idempotente de tipo 1, 32
  - idempotente de tipo 2, 32
  - identidade, 38
  - inf-gerador primitivo, 175
  - inf-gerador parametrizado por dois subconjuntos, 144
  - invariante por translação, 59
  - isotônico, 32
  - menor que outro, 38
  - primitivo, 173
  - sup-gerador primitivo, 174
  - sup-gerador genérico, 186
  - sup-gerador parametrizado por dois subconjuntos, 144
- Operadores mutuamente duais por complementação, 90
- Oposto de um elemento, 52
- Origem, 56

**P**

- Padrão, 144
- Partição de um conjunto, 44
- Pixel, 9
  - de uma imagem, 9

**Ponto**

- 4-isolado, 143
- 8-isolado, 143

**Pontos**

- 4-adjacentes, 142
- 8-adjacentes, 142

**Posição de um pixel, 9****Primitiva do filtro do centro, 201****Processador**

- celular, 161
- morfológico, 157
- primitivo de dilatação, 159
- primitivo de erosão, 159

**Produto de um operador por um outro, 45****Programa da MMach, 157****Q****Quadrado elemental, 154****R****Reflexividade, 21****Relação**

- "menor que"
  - entre funções binárias, 21
  - entre operadores, 38
- de Chasles, 54
- de igualdade entre funções binárias, 21
- de ordem, 21

**Resíduo**

- do fechamento convexo em relação à abertura convexa., 186
- do fechamento em relação à abertura, 186

**Reticulado completo, 28****Rotulação, 201****S****Semântica, 151****SKIZ, 204****Soma**

- de Minkovski de dois subconjuntos, 65
- de pontos relativa a um ponto origem, 56
- de um ponto por um vetor, 55
- módulo um inteiro, 53

Sub-reticulado completo, 39

Subcoleção

- induzida, 133
- invariante em translação, 115
- gerada por uma subcoleção, 116
- sup-fechada gerada por uma subcoleção, 108

Subconjunto

- 4-conexo, 134
- 4-desconexo, 134
- 8-conexo, 134
- 8-desconexo, 134
- inf-fechado, 41
- simétrico, 62
- sup-fechado, 41

Subconjuntos

- 4-homotópicos, 147
- 8-homotópicos, 147
- mutuamente transpostos, 95

Subtração, de Minkowski, 69

Subtração entre duas funções binárias, 15

Suporte de uma função, 8

Supremo de um conjunto, 28

**T**

Tamanho de uma grade, 52

Topologia Digital, 131

Topologia num conjunto, 132

Tranposto de uma função, 93

Transitividade, 21

Translação por um vetor, 58

Translado de um conjunto por um vetor, 58

Transposição, 61

Transposto de um conjunto, 61

## U

União

- de dois operadores, 37
- de duas funções binárias, 11
- de uma família
  - de funções, 18
  - de operadores, 38
- de uma família de subconjuntos, 16
- de uma função binária, 18
- entre dois operadores, 37
- entre duas funções binárias, 11
- entre os elementos de uma família
  - de 0 e 1, 17
  - de funções binárias, 19
  - de operadores, 38
  - de subconjuntos, 17

## V

Valor de um pixel, 9

## Z

Zona de influência das componentes conexas, 204